Disequazioni razionali intere e fratte

Premessa

La risoluzione delle disequazioni rappresenta un capitolo essenziale nello studio delle funzioni ed è quindi un argomento di studio che, affrontato nei primi anni del Liceo scientifico, viene poi ampiamente applicato in tutti gli anni successivi.
Il metodo tradizionale si articola in alcuni passaggi che sostanzialmente consistono nella ricerca degli intervalli di verità delle singole disequazioni e nella messa a sistema delle soluzioni trovate.
Nei casi più semplici il metodo tradizionale può essere applicato facilmente e in maniera intuitiva, ma quando il problema si complica, come per esempio con disequazioni non lineari o con disequazioni fratte o letterali, diventa farraginoso e può facilmente portare ad errori degli studenti.
Per le diseguaglianze e le disequazioni, rispetto alle uguaglianze ed alle equazioni, esiste infatti una difficoltà aggiuntiva poiché *la seconda proprietà invariantiva è applicabile solo quando il fattore è strettamente positivo*, cioè non è sufficiente che sia solo diverso da zero, e ciò è fonte generale di errori, soprattuto con un parametro di cui non sia noto il segno.
Per le disequazioni non lineari e per quelle fratte si presenta un'ulteriore difficoltà legata alla determinazione della intersezione tra i diversi insiemi di verità delle singole disequazioni in cui quella originale può essere scomposta, che viene affrontata tradizionalmente con una rappresentazione grafica a più livelli.

Nella trattazione che segue, non faremo riferimento alle disequazioni intere in quanto anche ad esse è possibile applicare la stessa metodologia.

Il metodo alternativo

Visto che l'obiettivo della risoluzione delle disequazioni è la *determinazione degli intervalli di verità della relazione*, esso consiste in pratica nell'individuazione del segno di uno o più polinomi che costituiscono il primo membro della disequazione stessa: *studiare la disequazione f(x) > 0* (o analoghe) *consiste nell'individuare gli intervalli dell'asse x in cui la funzione f(x) assume valori positivi*.
Il problema si trasforma quindi nella determinazione dei valori di x per cui la funzione f(x) assume un valore nullo: negli altri punti dell'asse reale, la f(x) sarà positiva o negativa e quindi la disequazione sarà soddisfatta o meno.
Qualunque tipo di disequazione può essere trasformata in una equivalente (cioè con gli stessi valori di verità) del tipo f(x) > 0, applicando la <u>prima proprietà invariantiva</u>, valida anche per le disequazioni.
In altre parole, la disequazione:

$$\frac{f_1}{g_1} > \frac{f_2}{g_2}$$

in cui f_1, f_2, g_1 e g_2 sono funzioni della variabile x, con $g_1 \neq 0$ e $g_2 \neq 0$, mediante *la prima proprietà invariantiva*, può essere trasformata nell'equivalente:

$$\frac{f_1}{g_1} - \frac{f_2}{g_2} > 0$$
$$g_1 \neq 0$$
$$g_2 \neq 0$$

ma *non* possiamo eseguire il minimo comune multiplo perchè **i *segni* di $g_1(x)$ e di $g_2(x)$dipendono ovviamente dal valore di x.**

A proposito di tale problema, riporto di seguito un'osservazione tratta da Spirito, Zou, Scalia: La costruzione matematica Vol. 1:

"*...finchè l'incognita è indeterminata non possiamo sapere se il denominatore comune che vorremmo eliminare, moltiplicando per esso entrambi i membri, è positivo o negativo. E quindi, finchè non conosciamo le soluzioni, non sappiamo se dobbiamo invertire o no il verso della diseguaglianza*".

Il problema è risolto normalmente con lo studio di *due* sistemi di disequazioni che impongono (nel caso da noi considerato di una disequazione del tipo f(x) > 0) lo stesso segno per denominatore e numeratore:

$$\begin{cases} f_1 * g_2 - g_1 * f_2 > 0 \\ g_1 * g_2 > 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} f_1 * g_2 - g_1 * f_2 < 0 \\ g_1 * g_2 < 0 \end{cases}$$

senza peraltro superare la difficoltà di una moltiplicazione per fattori (g_1 e g_2) dal segno indeterminato.

Per evitare il problema è invece più corretto *ridimensionare l'obiettivo* determinando semplicemente gli zeri del polinomio $f_1(x)/g_1(x) - f_2(x)/g_2(x)$ (che ci permetteranno di dedurre gli intervalli in cui questo assume valori diversi da zero e quindi positivi o negativi); possiamo in altre parole risolvere la *corrispondente equazione* $f_1(x)/g_1(x) - f_2(x)/g_2(x) = 0$ **utilizzando le *due* proprietà invariantive**:

$$\frac{(f_1 * g_2 - f_2 * g_1)}{(g_1 * g_2)} = 0$$
$$g_1 \neq 0$$
$$g_2 \neq 0$$

Ora, considerato che il segno del polinomio a primo membro dipenderà sia dal segno del numeratore che da quello del denominatore, e che **il segno del rapporto è sempre uguale a quello del prodotto degli stessi fattori**, possiamo *riscrivere il problema* nella maniera più semplice, moltiplicando ambo i membri dell'equazione per $g_1 * g_2$, con la condizione che tale fattore sia diverso da zero:

$$(f_1 * g_2 - f_2 * g_1) * (g_1 * g_2) = 0$$
$$g_1 \neq 0$$
$$g_2 \neq 0$$

Osserviamo nuovamente che i valori di x che fanno cambiare i segni del polinomio a primo membro dell'equazione precedente corrispondono a quelli del polinomio originale, poiché abbiamo applicato le sole due proprietà invariantive e che, di conseguenza, il problema è stato trasformato in uno equivalente.

Si tratta ora di risolvere l'equazione determinandone gli zeri che possono essere essenzialmente di tre tipi distinti:
A) *zeri reali di molteplicità dispari*, intendendo per molteplicità il numero di volte che si presenta lo stesso zero in valore e segno (se, ad esempio, lo zero x=3 è presente 3 volte, la sua molteplicità è dispari);
B) *zeri reali di molteplicità pari*, con lo stesso significato di molteplicità;
C) *zeri complessi coniugati*.

Orbene, per il teorema fondamentale dell'algebra, *il segno del polinomio cambia soltanto in corrispondenza degli zeri reali di molteplicità dispari.*

Facciamo inoltre notare che, per il *principio d'annullamento del prodotto*, gli zeri dei due polinomi $(f_1 * g_2 - f_2 * g_1)$ e $(g_1 * g_2)$ si possono ottenere facilmente con le due equazioni:

$$f_1 * g_2 - f_2 * g_1 = 0 \quad \text{e} \quad g_1 * g_2 = 0$$

Per determinare i valori di verità della disequazione, sarà a questo punto sufficiente riportare su *un unico grafico* tutte le soluzioni reali, indicando quelle di molteplicità pari con parentesi tonde () e quelle di molteplicità dispari con parentesi quadre [] per poterli facilmente distinguere tra loro, in ordine crescente da sinistra verso destra:

--------[]----------[]----------()----------()----------[]----------
x_1 x_2 x_3 x_4 x_5

con x_1, x_2, x_5 reali di molteplicità dispari e x_3, x_4 reali di molteplicità pari (gli zeri complessi coniugati ovviamente non vanno riportati sull'asse reale...).
Visto che il segno del polinomio cambia solo in corrispondenza degli zeri reali di molteplicità dispari, è sufficiente stabilire il segno del polinomio all'interno di un qualsiasi intervallo (con la sostituzione di un qualsiasi valore di x interno all'intervallo) per poter poi in maniera automatica individuare il segno in tutti gli altri intervalli.
Se, ad esempio, il polinomio assume un valore positivo nell'intervallo $]x_3,x_4[$, i segni negli altri saranno quelli rappresentati in figura:

+ - + + + -

```
--------[]--------------[]------------()-----------()-----------------[]----------------
        x1              x2            x3          x4                 x5
```

Per di più, senza alcuna sostituzione, è possibile stabilire il segno del polinomio per valori di x *maggiori del più grande* tra gli *zeri reali* (nel nostro caso x_5) individuando il *segno* del termine di grado maggiore che resterà immutato per tutto l'intervallo]x5,+∞[e stabilire poi il segno in tutti gli altri intervalli alternandolo con quello precedente, se lo zero è indicato da una coppia di parentesi quadre (radici reali di molteplicità dispari) o lasciandolo inalterato se lo zero è indicato da una coppia di parentesi tonde (radici reali di molteplicità pari).

Questa ultima osservazione è particolarmente utile per le disequazioni di grado elevato.

La soluzione della disequazione sarà quindi rappresentata da tutti gli intervalli in cui il valore di x farà assumere un valore positivo (nel nostro caso) al polinomio:

$$-\infty < x < x_1$$
$$x_2 < x < x_3$$
$$x_3 < x < x_4$$
$$x_4 < x < x_5$$

Nel caso che la disequazione sia del tipo $f(x) \leq 0$ oppure $f(x) \geq 0$ bisognerà comunque escludere i valori di x che annullano il denominatore della disequazione originale (nel nostro caso tutti i valori di x per cui $g_1(x) = 0$ oppure $g_2(x) = 0$), che, pur comportando una modifica del segno del rapporto, costituiscono punti di asintoto verticale; per comodità quindi converrà indicare tali valori con un simbolo speciale (•) o [•] rispettivamente. Supponendo che gli zeri da escludere siano x_2 ed x_4, il grafico del nostro esempio diventerebbe.

```
    +        -          +           +           +             -
--------[]-------[•]--------()-----------(•)-------[]----------------
        x1        x2        x3            x4       x5
```

Per l'applicazione pratica del metodo, controllare gli esempi che lo confrontano con quello tradizionale riportati di seguito.

Esempio n. 1

Metodo tradizionale

Risolvere la disequazione fratta: $\frac{3}{(x+2)} > \frac{-2}{(x-2)}$

Applicando la I prop. Invariantiva:

$$\frac{3}{(x+2)} + \frac{2}{(x-2)} > 0$$

A questo punto viene applicata la II prop. Invariantiva *senza tener conto che il prodotto (x+2)*(x-2) potrebbe essere negativo per alcuni valori di x e che quindi potrebbe cambiare il verso della disequazione*, trasformandola nella seguente:

$$\frac{(5x-2)}{(x^2-4)} > 0$$

che equivale a risolvere i due sistemi di disequazioni seguenti:

$5x-2 > 0$ $\qquad$ $5x-2 < 0$

e

$x^2-4 > 0$ $\qquad$ $x^2-4 < 0$

Il primo sistema è risolto dall'intersezione degli insiemi di verità delle due disequazioni:

(5x-2) > 0 ----------[2/5]**********

(x^2-4) > 0 +++++[-2•]----------[2 •]**********

che equivale a: ----------[2•]**********

con soluzione x > 2.

Il secondo sistema è risolto dall'intersezione degli insiemi di verità delle due disequazioni:

(5x-2) < 0 **********[2/5]----------

(x^2-4) < 0 ----------[-2•]**********[2•]----------

che equivale a: ----------[-2•]**********[2/5]----------

con soluzione -2 < x < 2/5.

Al solito con il puntino • abbiamo indicato i punti singolari, mentre con * gli intervalli in cui è verificata la corrispondente disequazione.

Quindi, con l'unione dei due insiemi di verità, si ha, come soluzione della disequazione, l'insieme:

] -2, 2/5 [∪] 2, + ∞ [

Metodo innovativo

Applicando la I prop. Invariantiva:

$$\frac{3}{(x+2)}+\frac{2}{(x-2)}>0$$

Si scrive ora la corrispondente equazione a cui è possibile applicare anche la II prop. Invariantiva e si ottiene:

$$\frac{(5x-2)}{(x^2-4)}=0$$

Si moltiplica il numeratore per il denominatore, facendo peraltro notare che quest'ultimo deve essere diverso da zero (cosa trascurata nel metodo precedente), ottenendo il seguente sistema:

$$(5x-2)(x^2-4) = 0$$
$$(x^2-4) \neq 0$$

Si riportano su un unico grafico tutte le soluzioni delle due equazioni:

$5x-2 = 0$, con soluzione $x = 2/5$ e

$x^2-4 = 0$, con soluzioni $x = \pm 2$

e si assegnano i segni ai tre intervalli, partendo da quello $]2, +\infty[$ in cui il polinomio è positivo (perchè tale è il segno di $5x*x^2$).

In definitiva la disequazione è soddisfatta in tutti gli intervalli indicati con il segno + :

```
        -                          +                                  -                          +
--------------------[-2•]------------------------------[2/5]-------------------------------------[2•]--------------------------
```

e cioè in $]-2,2/5[$ e in $]2, +\infty[$

Esempio n. 2 (col metodo tradizionale)

Risolvere la disequazione: $\frac{(2x^4-16x)}{(x^4-1)}>0$

Scomponiamo in fattori numeratore e denominatore, ottenendo la:

$$\frac{(2x^4-16x)}{(x^4-1)}=\frac{(2x(x-2)(x^2+2x+4))}{((x^2+1)(x+1)(x-1))}>0$$

che equivale a risolvere i due sistemi di disequazioni seguenti:

$$\begin{matrix} 2x(x-2)(x^2+2x+4) > 0 \\ (x^2+1)(x+1)(x-1) > 0 \end{matrix} \quad \text{e} \quad \begin{matrix} 2x(x-2)(x^2+2x+4) < 0 \\ (x^2+1)(x+1)(x-1) < 0 \end{matrix}$$

Il primo sistema si risolve imponendo che sia la prima che la seconda equazione assumano valori positivi, risolvendo quindi i sistemi di equazioni:

I-1

```
2x > 0          ------------------------------[0]*********************************************************
x-2 > 0         -------------------------------------------------------[2]****************************************
x²+2x+4 > 0     ******************************************************************************************
```

che ha per soluzione $x > 2$

I-2

```
2x > 0          ------------------------------[0]*********************************************************
x-2 < 0         ************************************ [2]-------------------------------------------------------
x²+2x+4 < 0 ----------------------------------------------------------------------------------------------------
```

che non è mai soddisfatto

I-3

$2x < 0$ **********[0]----------

$x-2 < 0$ **********[2]----------

$x^2+2x+4 > 0$ **********

che ha per soluzione $x < 0$

I-4

$2x < 0$ **********[0]----------

$x-2 > 0$ ----------[2]**********

$x^2+2x+4 < 0$ ----------

che non è mai soddisfatto.

Dunque la **prima** equazione del **primo** sistema è soddisfatta dall'**unione** degli intervalli:

$$]-\infty, 0[\cup]2, +\infty[$$

La stessa procedura si utilizza per la **seconda** equazione del **primo** sistema:

II-1

$x^2+1 > 0$ **********

$x+1 > 0$ ----------[-1]**********

$x-1 > 0$ ----------[1]**********

che ha per soluzione $x > 1$

II-2

$x^2+1 > 0$ **********

$x+1 < 0$ **********[-1]----------

$x-1 < 0$ **********[1]----------

che ha per soluzione $x < -1$

II-3

$x^2+1 < 0$ ----------

$x+1 < 0$ **********[-1]----------

$x-1 > 0$ ----------[1]**********

che non è mai soddisfatto

II-4

$x^2+1 < 0$ ----------

$x+1 > 0$ ----------[-1]**********

$x-1 < 0$ **********[1]----------

che non è mai soddisfatto

Dunque la **seconda** equazione del **primo** sistema è soddisfatta dall'**unione** degli intervalli:

$$]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$$

Notiamo esplicitamente che i punti -1 e 1 devono essere esclusi perchè singolari per il rapporto considerato.

Infine (ma non è ancora finito....) il **primo sistema** è soddisfatto dall'**intersezione** dei due insiemi di verità delle due disequazioni che lo compongono:

$2x(x-2)(x^2+2x+4) > 0$ **********[0]----------[2]**********

$(x^2+1)(x+1)(x-1) > 0$ **********[-1]----------[1]**********

e cioè dall'insieme di verità:

**********[-1]----------[2]**********

corrispondente all'**unione** dei due intervalli: $]-\infty, -1[\cup]2, +\infty[$

Teoricamente bisognerebbe ripetere la stessa procedura per il **secondo sistema** (che ovviamente qui non riporteremo...) ottenendo per esso l'insieme di verità complessivo: $]0,1[$

La soluzione della disequazione sarebbe quindi fornita dall'**unione** dei due insiemi di verità ricavati dai due sistemi:

$\frac{(2x^4-16x)}{(x^4-1)}>0$ *********[-1]------[0]********[1]----------[2] **********

corrispondente all'**unione** degli intervalli:] - ∞ , -1[∪] 0, 1 [∪] 2, + ∞ [

Per fortuna esiste un metodo alternativo a questo....

Esempio n. 2 (col metodo innovativo)

Risolvere la disequazione: $\frac{(2x^4-16x)}{(x^4-1)}>0$

Scomponiamo in fattori numeratore e denominatore, ottenendo la:

$$\frac{(2x^4-16x)}{(x^4-1)}=\frac{(2x(x-2)(x^2+2x+4))}{((x^2+1)(x+1)(x-1))}>0$$

Moltiplichiamo numeratore per denominatore e risolviamo la corrispondente equazione, rammentando che il denominatore deve essere diverso da zero:

$$2x\ (x-2)\ (x^2+2x+4)\ (x^2+1)\ (x+1)\ (x-1) = 0$$
$$(x^2+1)\ (x+1)\ (x-1) \neq 0$$

Risolviamo dunque le singole equazioni, applicando il principio di annullamento del prodotto:

$$\begin{array}{lcl} 2x=0 & \rightarrow & x=0 \\ x-2=0 & \rightarrow & x=2 \\ x^2+2x+4=0 & \rightarrow & nessun\ \ valore\ \ reale \\ x^2+1=0 & \rightarrow & nessun\ \ valore\ \ reale \\ x+1=0 & \rightarrow & x=-1 \\ x-1=0 & \rightarrow & x=1 \end{array}$$

Riportiamo su *un unico grafico* tutte le soluzioni reali e assegniamo i segni agli intervalli, partendo da quello]2, +∞[in cui il polinomio è positivo (perchè tale è il segno di $2x*x*x^2*x^2*x*x$).

In definitiva la disequazione è soddisfatta in tutti gli intervalli indicati con il segno +:

+ - + - +

**********[-1•]---------[0]********[1•]--------[2]**********

con lo stesso insieme di verità trovato con l'altro metodo, ma con una procedura certamente più semplice....

Esempio n. 3 (col metodo tradizionale)

Risolvere la disequazione: $\frac{(8x^4-14x^3-69x^2-14x+8)}{(6x^4+5x^3-38x^2+5x+6)}\leq 0$

Scomponiamo in fattori numeratore e denominatore, ottenendo la:

$$\frac{(8x^4-14x^3-69x^2-14x+8)}{(6x^4+5x^3-38x^2+5x+6)}=$$
$$=\frac{(8(x-4)(x-\frac{1}{4})(x-2)(x-\frac{1}{2}))}{(6(x+3)(x-\frac{1}{3})(x-2)(x-\frac{1}{2}))}\leq 0$$

La disequazione ha significato per x ≠ -3, x ≠ 1/3, x ≠ 2 e x ≠ ½.

Ci potrebbe venire in mente di semplificare l'espressione -dividendo numeratore e denominatore per (x—2)(x-1/2)- ma ciò non è lecito perchè non si sa se i due fattori sono diversi da zero e, per di più, per la disequazione, non conosciamo il segno dei fattori, anche se tale operazione non comporterebbe la modifica del segno!!

La semplificazione produrrebbe comunque, in questo caso, anche la sparizione di due radici dall'insieme degli zeri dei polinomi.

Riteniamo dunque che il metodo tradizionale, molto complicato come vedremo in seguito, può creare problemi e generare errori nel computo degli insiemi di verità (soprattutto nel caso di disequazioni in senso lato, cioè con le relazioni ≤ o ≥).

A questo punto dovremmo risolvere i soliti due sistemi costituiti dalle disequazioni:

$$\begin{matrix} 8(x-4)(x-\frac{1}{4})(x-2)(x-\frac{1}{2})\geq 0 \\ 6(x+3)(x-\frac{1}{3})(x-2)(x-\frac{1}{2})<0 \end{matrix} \quad \text{e} \quad \begin{matrix} 8(x-4)(x-\frac{1}{4})(x-2)(x-\frac{1}{2})\leq 0 \\ 6(x+3)(x-\frac{1}{3})(x-2)(x-\frac{1}{2})>0 \end{matrix}$$

costituiti, *ciascuno*, da ben 8 disequazioni:

```
            |                    |        |        |            |          |
x-4   ---------------------------------------------------------------------[4]+++++++++++++++++++++++
            |                    |        |        |            |          |
x-1/4 ----------------------------[1/4]++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++
            |                    |        |        |            |          |
x-2   ------------------------------------------------------------------[2]++++++++++++++++++++++++++++++
            |                    |        |        |            |          |
x-1/2 ---------------------------------------------------[1/2]+++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++
            |                    |        |        |            |          |
x+3  ------[-3•]++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++
            |                    |        |        |            |          |
x-1/3 ------------------------------------------[1/3•]++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++
            |                    |        |        |            |          |
x-2   ------------------------------------------------------------------[2•]++++++++++++++++++++++++++++++
            |                    |        |        |            |          |
x-1/2 ---------------------------------------------------[1/2•]+++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++
```

Per risolvere il sistema è sufficiente moltiplicare i segni in tutti gli intervalli individuati dal simbolo "|" e verificare quando i loro prodotti siano negativi o nulli, ottenendo gli insiemi di verità:

]-3, ¼] ∪]1/3, ½[∪]½,2[∪]2,4]

poiché, in tali intervalli, il prodotto dei segni è negativo.
Notare che i punti singolari -3, 1/3, 1/2, 2, contrassegnati dal puntino • , sono stati esclusi.

Utilizzeremo ora il metodo alternativo per dimostrare quanto sia di più semplice applicazione.

Esempio n. 3 (col metodo innovativo)

Risolvere la disequazione: $\frac{(8x^4-14x^3-69x^2-14x+8)}{(6x^4+5x^3-38x^2+5x+6)} \leq 0$

Come col metodo tradizionale, scomponiamo in fattori numeratore e denominatore, e riscriviamo la *corrispondente equazione*, ottenendo la:

$$\frac{(8x^4-14x^3-69x^2-14x+8)}{(6x^4+5x^3-38x^2+5x+6)} =$$

$$= \frac{(8(x-4)(x-\frac{1}{4})(x-2)(x-\frac{1}{2}))}{(6(x+3)(x-\frac{1}{3})(x-2)(x-\frac{1}{2}))} = 0$$

moltiplichiamo ora il numeratore per il denominatore e scriviamo *il sistema risolvente*:

$$48(x-4)(x-\frac{1}{4})(x-2)^2(x-\frac{1}{2})^2 \quad (x+3)(x-\frac{1}{3}) = 0$$

$$(x+3)(x-\frac{1}{3})(x-2)(x-\frac{1}{2}) \neq 0$$

Riportiamo su un unico grafico tutte le soluzioni indicando quelle di molteplicità dispari con le coppie di parentesi quadre [] e quelle di molteplicità pari con le tonde () ed evidenziando quelle da escludere col il puntino • :

+ - + - - - +

-----[-3•]----------[1/4]---------[1/3•]----------(1/2•)----------(2•)----------[4]----------

ove i segni sono stati stabiliti a partire dall'ultimo intervallo [4,+ [caratterizzato da un segno positivo perchè tale è il prodotto dei termini dominanti di tutti i fattori: $x*x*x^2*x^2*x*x$

Otteniamo così, più facilmente, l'insieme di verità della disequazione:

]-3,1/4] ∪]1/3, ½ [∪]1/2,2[∪]2,4]

con esclusione dei punti singolari -3, 1/3, 1/2, 2 che annullerebbero il denominatore.