Disequazioni irrazionali.

E' irrazionale una disequazione in cui la variabile compare sotto il segno di radice.
I problemi con le disequazioni irrazionali sorgono essenzialmente solo nel caso che l'indice del radicale sia pari, in quanto per gli indici dispari sarebbe sufficiente elevare ambo i membri all'opportuna potenza senza alcuna incertezza sul verso della disequazione: elevare ad una potenza dispari significa infatti moltiplicare il numero per sé stesso un numero *pari di volte* che è sicuramente positivo, senza problemi per il verso della disequazione.
Abbiamo usato il condizionale perchè in effetti *elevare ambo i membri ad una stessa potenza equivale ad applicare la seconda proprietà invariantiva che richiede che il fattore per cui si moltiplica sia lo stesso (in valore e segno e diverso da zero) per tutti e due i membri;* così non è nel caso delle disequazioni che affermano una sostanziale diversità dei due membri:

$$5>\sqrt[3]{x}$$

E' quindi sempre necessario considerare *sempre* la corrispondente equazione:

$$5>\sqrt[3]{x}\rightarrow 5=\sqrt[3]{x}\rightarrow 125=x$$

per poter eliminare la radice.

<u>Una volta trovata la soluzione col metodo già indicato per le disequazioni razionali intere o fratte, si dovrà poi verificare se la disequazione originale è verificata. Perchè moltiplicando per un fattore, si eleva il grado dell'equazione e si aumenta quindi il numero delle soluzioni accettabili.</u>

Nel caso di **indici dispari**, non occorre imporre alcuna condizione di realtà per il radicando in quanto il numero $\sqrt[n]{f(x)}$ con n dispari è reale per tutti i valori di f(x).
Ciò vale in tutti i casi del tipo:

$$\sqrt[n]{f(x)}<\sqrt[m]{g(x)} o \sqrt[n]{f(x)}\geq\sqrt[m]{g(x)}$$

con n ed m dispari.
Per la risoluzione di un'equazione irrazionale ad indici dispari, per quanto sopra ricordato, conviene scrivere la corrispondente equazione:

$$\sqrt[n]{f(x)}=\sqrt[m]{g(x)}$$

valida in tutti e due e casi ed elevare poi ambo i membri alla potenza n-esima (che è dispari) prima e a quella m-esima (che è dispari) poi per ottenere l'equazione equivalente:

$$(f(x))^m=(g(x))^n$$

che, essendo razionale, può essere risolta con i metodi delle equazioni intere.

Per le disequazioni irrazionali ad **indice pari** bisogna invece imporre sempre la *condizione di realtà* per tutti i radicali coinvolti e quindi si deve in ogni caso risolvere un sistema di disequazioni: la soluzione sarà rappresentata dall'*intersezione* degli insiemi di verità di tutte le disequazioni del sistema.
Le disequazioni irrazionali ad indice pari sono essenzialmente di 4 tipi distinti:

$$I: f(x) < \sqrt{f(x)}$$
$$II: f(x) \geq \sqrt{f(x)}$$
$$III: \sqrt{f(x)} < \sqrt{g(x)}$$
$$IV: \sqrt{f(x)} \geq \sqrt{g(x)}$$

supponendo, in tutti i casi, che i radicali siano assunti con valore positivo.

In ogni caso, per l'osservazione già fatta in precedenza, si dovrà studiare la *corrispondente equazione*.

I) $f(x) > \sqrt{g(x)} \rightarrow f(x) = \sqrt{g(x)}$
che si risolve con il sistema:

$$g(x) \geq 0 \quad \textit{condizione di realtà}$$
$$f(x) > 0 \quad \textit{perchè } f(x) > \sqrt{g(x)}$$
$$f^2(x) > g(x) \quad \textit{essendo i due membri positivi}$$

tradotto nel sistema risolutivo:

$$f(x) = 0$$
$$g(x) = 0$$
$$f^2(x) = g(x)$$

per il quale, bisognerà risolvere le singole equazioni e, successivamente, calcolare l'***intersezione*** dei rispettivi insiemi di verità (vedere gli esempi allegati).

II) $f(x) < \sqrt{g(x)} \rightarrow f(x) = \sqrt{g(x)}$
In questo caso si devono considerare due casi distinti a seconda del segno di f(x):
II-a: f(x) ≥ 0
che si risolve con il sistema:

$$g(x) > 0 \quad \textit{condizione di realtà, con } \sqrt{g(x)} > f(x) \textit{ e } f(x) \geq 0$$
$$f(x) \geq 0$$
$$(f(x))^2 < g(x) \quad \textit{essendo i due membri positivi}$$

tradotto nel sistema risolutivo:

$$f(x) = 0$$
$$g(x) = 0$$
$$f^2(x) = g(x)$$

per il quale, bisognerà risolvere le singole equazioni e, successivamente, calcolare l'***intersezione*** dei rispettivi insiemi di verità (perchè le disequazioni devono verificarsi contemporaneamente).
oppure:

II-b: f(x) < 0

che si risolve con il sistema:

$$g(x)\geq 0 \quad condizione\ di\ realtà$$
$$f(x)<0$$

(visto che f(x) < 0 e $\sqrt{g(x)}$ positivo, non occorre alcuna condizione aggiuntiva)

tradotto nel sistema risolutivo:

$$f(x)=0$$
$$g(x)=0$$

per il quale, bisognerà risolvere, con i metodi della I parte, le singole equazioni e, successivamente, calcolare l'***intersezione*** dei rispettivi insiemi di verità (perchè le disequazioni devono verificarsi contemporaneamente). In questo caso non è possibile fare il quadrato di ambo i membri perchè f(x) è negativo.

*La soluzione della disequazione sarà poi data dall'**unione** degli insiemi di verità dei due casi precedenti.*

III) $\sqrt{f(x)}>\sqrt{g(x)} \rightarrow \sqrt{f(x)}=\sqrt{g(x)}$

che si risolve con il sistema:

$$f(x)>0 \quad condizione\ di\ realtà, con\ f(x)>\sqrt{g(x)}\ e\ \sqrt{g(x)}\ positivo$$
$$g(x)\geq 0 \quad condizione\ di\ realtà$$
$$f(x)>g(x)$$

tradotto nel sistema risolutivo:

$$f(x)=0$$
$$g(x)=0$$
$$f(x)=g(x)$$

per il quale, bisognerà risolvere, con i metodi della I parte, le singole equazioni e, successivamente, calcolare l'***intersezione*** dei rispettivi insiemi di verità (perchè le disequazioni devono verificarsi contemporaneamente).

IV) $\sqrt{f(x)}<\sqrt{g(x)} \rightarrow \sqrt{f(x)}=\sqrt{g(x)}$

che si risolve con il sistema:

$$f(x)\geq 0 \quad condizione\ di\ realtà$$
$$g(x)>0 \quad condizione\ di\ realtà, con\ f(x)\geq 0$$
$$f(x)<g(x)$$

tradotto nel sistema risolutivo:

$$f(x)=0$$
$$g(x)=0$$
$$f(x)=g(x)$$

per il quale, bisognerà risolvere le singole equazioni e, successivamente, calcolare l'***intersezione*** dei rispettivi insiemi di verità (perchè le disequazioni devono verificarsi contemporaneamente).

Per riassumere le diverse situazioni, utilizziamo la seguente tabella:

Tabella per le disequazioni irrazionali (indice pari)			
	f(x)	**g(x)**	**disequazione**
$f(x)>\sqrt{g(x)}$	**> 0**	**≥ 0**	**$f^2(x) - g(x) > 0$**
$f(x)<\sqrt{g(x)}$	**≥ 0**	**> 0**	**$f^2(x) - g(x) < 0$**
	< 0	**≥ 0**	**---------------**
$\sqrt{f(x)}>\sqrt{g(x)}$	**> 0**	**≥ 0**	**f(x) – g(x) > 0**
$\sqrt{f(x)}<\sqrt{g(x)}$	**≥ 0**	**> 0**	**f(x) – g(x) < 0**

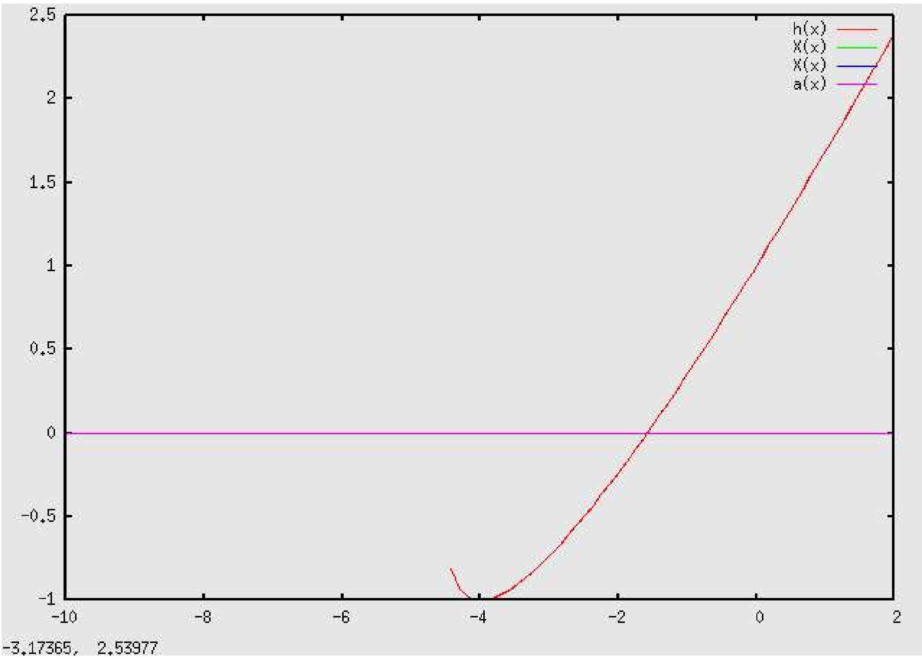
Esempi di applicazione del metodo

I) $x+4>\sqrt{2x+9}$

Dalla tabella si deduce che deve essere:

	⊖		⊕		
$x+4>0$	------------------------[-4]--				
	⊖		⊕		
$2x+9 \geq 0$	---[-9/2]--				
	⊕		⊖		⊕
$(x+4)^2 - 2x - 9 = x^2 + 6x + 7 > 0$	-----------[	$-3-\sqrt{2}$]---------------[	$-3+\sqrt{2}$]----------------------		

con una rappresentazione grafica della funzione h(x) = $x+4-\sqrt{2x+9}$ fornita da:



con una soluzione fornita dall'intervallo:] $-3+\sqrt{2}$, $+\infty$ [

II) $x+1<\sqrt{x+2}$

Dalla tabella si deduce che deve essere, **con x+1 ≥ 0**:

$\ominus$ $\oplus$

x+1 ≥ 0 ------------------------------------[-1] **--**

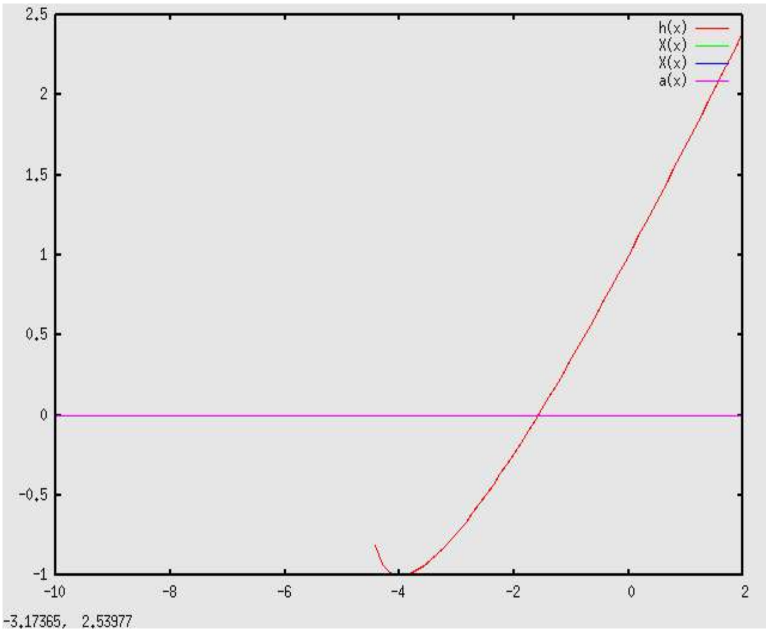
$\ominus$ $\oplus$

x + 2 > 0 --------------------[-2]**--**

$\oplus$ $\ominus$ $\oplus$

$(x+1)^2 - x - 2 = x^2 + x - 1 < 0$ ---[$\dfrac{(-1-\sqrt{5})}{2}$]**--------------------------------**[$\dfrac{(-1+\sqrt{5})}{2}$]-----------

con una rappresentazione grafica della funzione h(x) = $x+1-\sqrt{x+2}$ fornita da:



con una soluzione (parziale) fornita dall'intervallo [-1, $\dfrac{(-1+\sqrt{5})}{2}$ [

quando invece f(x) = **x+1 < 0**, si hanno solo le due condizioni:

$\ominus$ $\oplus$

x+1 **<** 0 **------------------------------------**[-1]--

$\ominus$ $\oplus$

x + 2 ≥ 0 --------------------[-2] **---**

con una soluzione (parziale) nell'intervallo [-2,-1[

La disequazione data ha quindi per soluzione l'**unione** dei due intervalli trovati, pari all'intervallo:

$$[-2,\ \frac{(-1+\sqrt{5})}{2}\ [$$

III) $\sqrt{2x^2+4x-9} > \sqrt{x^2-1}$

Dalla tabella si deduce che deve essere:

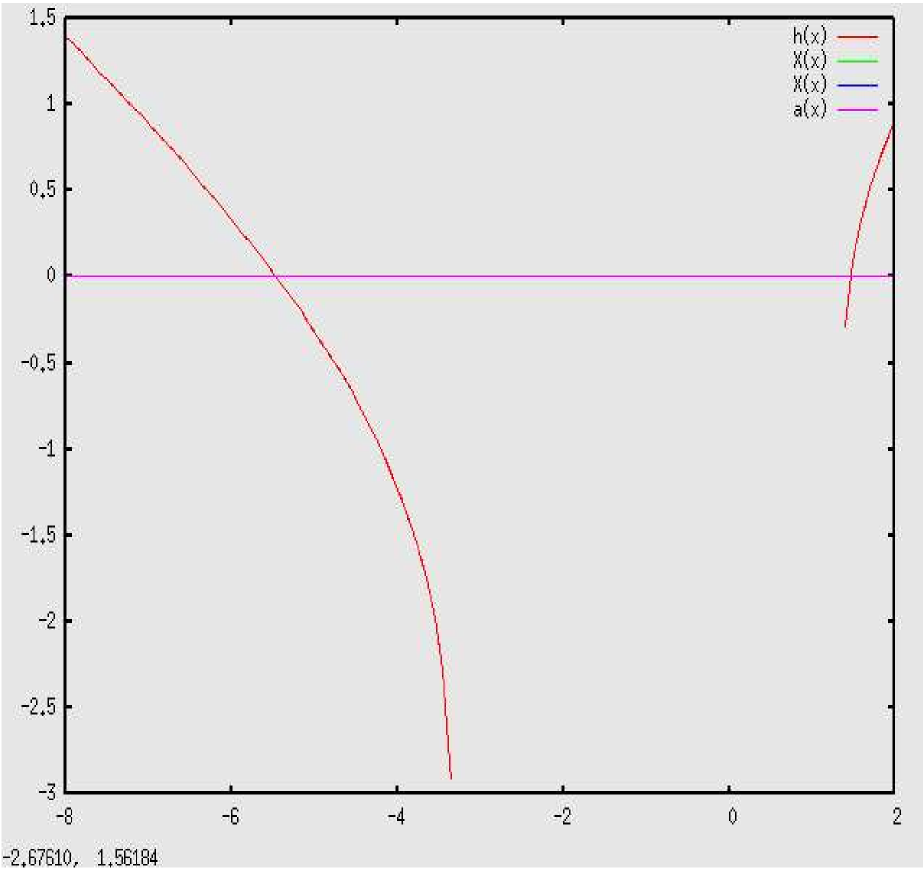
$2x^2 + 4x-9 > 0$ ------------- (⊕) $[\frac{(-2-\sqrt{22})}{2}]$ ------------------------------- (⊖) $[\frac{(-2+\sqrt{22})}{2}]$ -------------------- (⊕)

$x^2-1 \geq 0$ -------------------------------------(⊕)[-1]---------(⊖)[1]---(⊕)

$2x^2 + 4x-9 -x^2 + 1 = x^2 + 4x-8 > 0$

------------ (⊕) $[-2-\sqrt{12}]$ -- (⊖) $[-2+\sqrt{12}]$ -------- (⊕)

con una rappresentazione grafica della funzione h(x) = $\sqrt{2x^2+4x-9}-\sqrt{x^2-1}$ fornita da:



La disequazione data ha quindi per soluzione l'**unione** dei due intervalli trovati:

$] -\infty, \ [-2-\sqrt{12}] \ [\ \cup \ ] \ [-2+\sqrt{12}] \ , +\infty [$

IV) $\sqrt{2x^2+4x-9} < \sqrt{x^2-1}$

Dalla tabella si deduce che deve essere:

$\oplus$ $\ominus$ $\oplus$

$2x^2 + 4x-9 \geq 0$ **-------------** $[\frac{(-2-\sqrt{22})}{2}]$ -------------------------------- $[\frac{(-2+\sqrt{22})}{2}]$ **--------------------**

$\oplus$ $\ominus$ $\oplus$

$x^2-1 > 0$ **-----------------------------------[-1]**---------**[1]---**

$2x^2 + 4x-9 -x^2 + 1 = x^2 + 4x-8 < 0$

$\oplus$ $\ominus$ $\oplus$

------------ $[-2-\sqrt{12}]$ **---** $[-2+\sqrt{12}]$ **--------**

con una rappresentazione grafica della funzione h(x) = $\sqrt{2x^2+4x-9} - \sqrt{x^2-1}$ fornita dalla stessa figura precedente.

La disequazione data ha quindi per soluzione l'**unione** dei due intervalli trovati:

$] \ [-2-\sqrt{12}] \ , \ [\frac{(-2-\sqrt{22})}{2}] \ [\ \cup \ ] \ [\frac{(-2+\sqrt{22})}{2}] \ , \ [-2+\sqrt{12}] \ [$

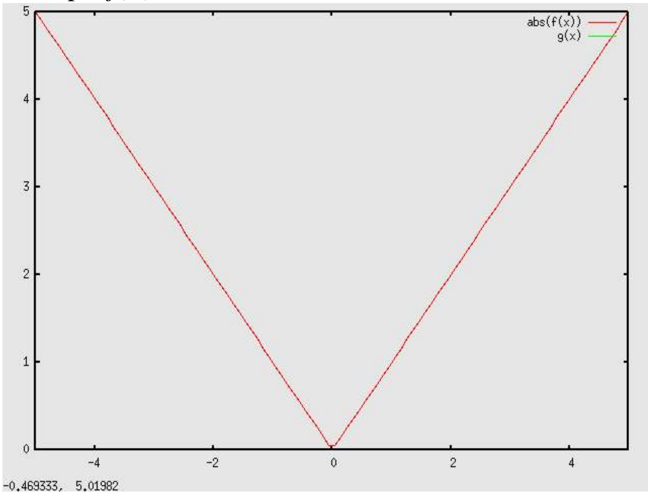
Disequazioni in valore assoluto.

Per definizione, si ha:

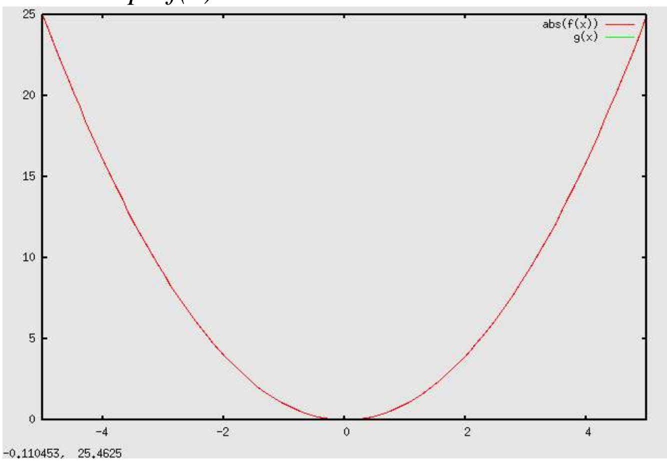
$$|f(x)| = f(x) \quad x \in R: \quad f(x) \geq 0$$
$$|f(x)| = -f(x) \quad x \in R: \quad f(x) < 0$$

e quindi la rappresentazione grafica del valore assoluto di f(x) è la seguente:

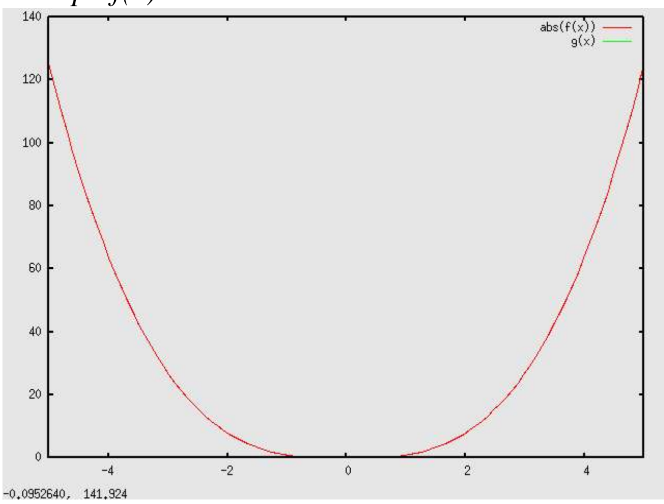
per una funzione lineare del tipo f(x) = x:



per una funzione quadratica del tipo f(x) = x^2:



per una funzione cubica del tipo f(x) = x^3:

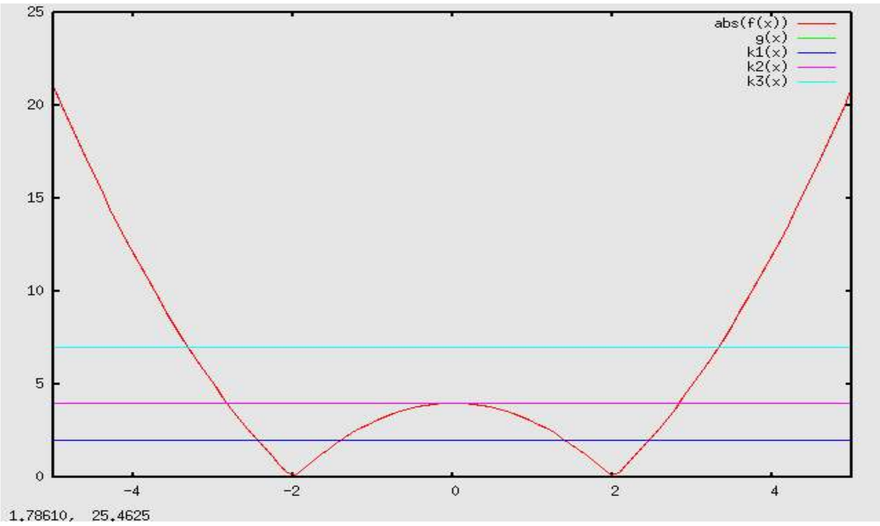


La funzione dunque non assume mai valori negativi.

Pertanto il confronto del valore assoluto di una funzione f(x) con una costante negativa o è sempre verificato ($|f(x)| \geq k, con\ k<0$ ***) o non lo è in nessun caso (*** $|f(x)| < k, con\ k<0$ ***).***

Il confronto di $|f(x)|$ *con una costante positiva o nulla dipende sia dal verso della disequazione che dal valore della costante.*

Prima di sviluppare la teoria relativa, a scopo esemplificativo, rappresentiamo graficamente la situazione nel caso che $|f(x)| < k, con\ k>0$ per la funzione quadratica f(x) = x^2 - 4 e per 3 valori diversi di k (k_1 = 2 , k_2 = 4 , k_3 = 7):



Nei tre casi, gli insiemi di verità in cui si verifica che $|f(x)| < k, con\ k>0$ sono visibilmente diversi:

Caso k = k1 = 2:

Per definizione, si deve risolvere il *sistema* costituito dalle due disequazioni:

$$x^2-4<2 \rightarrow x^2-6<0 \quad che \quad ha \quad come \quad risolvente \quad l'equazione \quad x^2-6=0$$
$$x^2-4>-2 \rightarrow x^2-2>0 \quad che \quad ha \quad come \quad risolvente \quad l'equazione \quad x^2-2=0$$

⊕ ⊖ ⊕

x^2- 6 <0 -------------------------[-√6]--[√6]---------------------------

⊕ ⊖ ⊕

x^2- 2 >0 ---------------------------------------[-√2]---------------[√2]--------------------------------------

e quindi con l'insieme di verità costituito dall'unione dei due intervalli in cui sono *contemporameamente* soddisfatte le due disequazioni:]-√6, -√2[∪]√2, √6[

Caso k = k2 = 4:

Per definizione, si deve risolvere il *sistema* costituito dalle due disequazioni:

$$x^2-4<4 \rightarrow x^2-8<0 \quad che \quad ha \quad come \quad risolvente \quad l'equazione \quad x^2-8=0$$
$$x^2-4>-4 \rightarrow x^2>0 \quad che \quad ha \quad come \quad risolvente \quad l'equazione \quad x^2=0$$

⊕ ⊖ ⊕

x^2- 8 <0 -----------[-√8]--[√8]---------------

⊕ ⊕

$x^2 > 0$ ---[0]--

e quindi con l'insieme di verità costituito dall'unione dei due intervalli in cui sono *contemporameamente* soddisfatte le due disequazioni:]-√8, 0[∪]0, √8[

<u>Caso k = k3 = 7</u>:

Per definizione, si deve risolvere il *sistema* costituito dalle due disequazioni:

$$x^2-4<7 \rightarrow x^2-11<0 \quad che \quad ha \quad come \quad risolvente \quad l'equazione \quad x^2-11=0$$
$$x^2-4>-7 \rightarrow x^2+3>0 \quad che \quad ha \quad come \quad risolvente \quad l'equazione \quad x^2+3=0$$

⊕ ⊖ ⊕

$x^2 - 11 < 0$ ----[-√11]---[√11]------

⊕

$x^2+3>0$ ---

e quindi con l'insieme di verità costituito dall'unico intervallo in cui sono *contemporameamente* soddisfatte le due disequazioni:]-√11, √11[

Il procedimento adottato per la funzione quadratica f(x) = $|x^2-4|$ può essere utilizzato per qualsiasi altra funzione.

<u>Nel caso che la disequazione sia del tipo $|x^2-4| > k$, con $k \geq 0$</u>, la rappresentazione grafica sarà la stessa già utilizzata nel caso precedente, ma gli insiemi di verità non saranno più costituiti dagli intervalli soluzioni di un *sistema* (e cioè dalla *intersezione* degli insiemi di verità delle due disequazioni), ma dalla loro *unione.*

Riprendendo i tre casi precedenti, si ha:

<u>Caso k = k1 = 2</u>:

Come già ricordato, si devono risolvere le due disequazioni, che *NON costituiscono sistema*:

$$x^2-4>2 \rightarrow x^2-6>0 \quad che \quad ha \quad come \quad risolvente \quad l'equazione \quad x^2-6=0$$
$$x^2-4<-2 \rightarrow x^2-2<0 \quad che \quad ha \quad come \quad risolvente \quad l'equazione \quad x^2-2=0$$

⊕ ⊖ ⊕

$x^2 - 6 > 0$ ------------------------[-√6]--[√6]--------------------------

⊕ ⊖ ⊕

$x^2 - 2 < 0$ -------------------------------------[-√2]---------------[√2]-------------------------------------

e quindi con l'insieme di verità costituito dall'unione dei due intervalli in cui sono soddisfatte *separatamente* le due disequazioni:]-∞, -√6[∪]√6, +∞[per la prima]-√2, √2[per la seconda.

<u>Caso k = k2 = 4</u>:

Si devono risolvere le due disequazioni, che *NON costituiscono sistema*:

$$x^2-4>4 \rightarrow x^2-8>0 \quad che \quad ha \quad come \quad risolvente \quad l'equazione \quad x^2-8=0$$
$$x^2-4<-4 \rightarrow x^2<0 \quad che \quad ha \quad come \quad risolvente \quad l'equazione \quad x^2=0$$

⊕ ⊖ ⊕

$x^2 - 8 > 0$ ----------[-√8]---[√8]--------------

⊕ ⊕

$x^2 < 0$ ---[0]---

e quindi con l'insieme di verità costituito dall'unione dei due intervalli in cui è soddisfatta la prima ( ]-∞, -√8[∪]√8, +∞[ ) poichè la seconda ha come insieme di verità l'insieme vuoto Ø.

Caso k = k3 = 7:

Si devono risolvere le due disequazioni, che *NON costituiscono sistema*:

$$x^2-4>7 \rightarrow x^2-11>0 \quad che \quad ha \quad come \quad risolvente \quad l'equazione \quad x^2-11=0$$

$$x^2-4<-7 \rightarrow x^2+3<0 \quad che \quad ha \quad come \quad risolvente \quad l'equazione \quad x^2+3=0$$

⊕ ⊖ ⊕

$x^2 - 11 > 0$ ----[-√11]---[√11]------

⊕

$x^2+3<0$ --

e quindi con l'insieme di verità costituito dall'unione dei due intervalli in cui è soddisfatta la prima ( ]-∞, -√11[∪]√11, +∞[ ) poichè la seconda ha come insieme di verità l'insieme vuoto Ø.

*Bisogna dunque fare molta attenzione alla differenza sostanziale nei due casi esaminati, ricordando che con la disequazione del tipo |f(x)| < k, con k ≥ 0, si deve risolvere un **sistema**, mentre con la disequazione della forma |f(x)| > k, con k ≥ 0, le due disequazioni sono **tra loro indipendenti**.*

Per continuare nella esemplificazione grafica, quando alla costante k sia sostituita una funzione g(x), cioè per la *disequazione del tipo: |f(x)| ≥ g(x) oppure |f(x)| < g(x)* , mentre il procedimento rimane inalterato, bisognerà, caso per caso, stabilire il s*egno della funzione g(x)* prima di adottare uno dei due procedimenti, infatti:

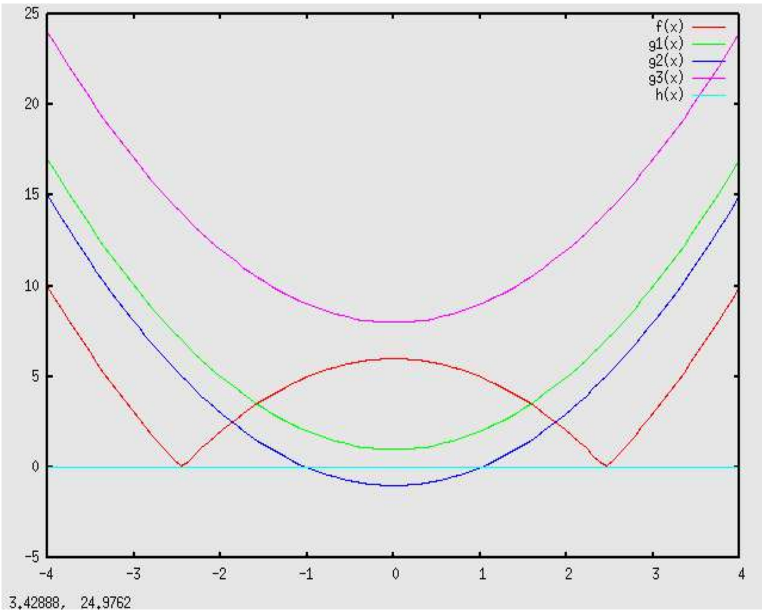
∀ x ∍ g(x) ≥ *0*

- *la disequazione |f(x)| < g(x) equivale al caso |f(x)| < k, con k ≥ 0, (data quindi dall'**intersezione** degli insiemi di verità delle due disequazioni in cui il problema si scompone);*
- *la disequazione |f(x)| > g(x) equivale al caso |f(x)| > k, con k ≥ 0, (data quindi dall'**unione** degli insiemi di verità delle due disequazioni, che NON costituiscono sistema);*

∀ x ∍ g(x) < *0*

- *la disequazione |f(x)| < g(x) equivale al caso |f(x)| < k, con k < 0, (**mai** soddisfatta);*
- *la disequazione |f(x)| > g(x) equivale al caso |f(x)| > k, con k < 0, (**sempre** soddisfatta);*

La rappresentazione grafica del problema nel caso che le funzioni siano:
$f(x) = x^2-6$, $g1(x) = x^2+1$, $g2(x) = x^2-1$, $g3(x) = x^2+8$, è quella riportata in figura:



Tratteremo ora il problema in generale, e quindi nel caso $|f(x)| < g(x)$ e in quello $|f(x)| \geq g(x)$, intendendo che la funzione g(x) può anche essere costante positiva, nulla o negativa.

Analizziamo dapprima la: ***|f(x)| < g(x)***
si possono verificare due casi distinti:
a) $g(x) \leqslant 0 \Rightarrow$ *la disequazione non è **mai** soddisfatta (ovviamente per tutti gli x appartenenti al dominio di negatività di g(x));*
*b) $g(x) > 0 \Rightarrow$ la disequazione è soddisfatta dalle soluzioni del **sistema** costituito dalle due disequazioni, e quindi dall'**intersezione** dei loro insiemi di verità:*

$$|f(x)| < g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) < g(x),\ \forall\, x \ni f(x) \geq 0,\ \forall\, x \ni g(x) > 0 \\ f(x) > -g(x),\ \forall\, x \ni f(x) < 0,\ \forall\, x \ni g(x) > 0 \end{cases}$$

Passiamo ora alla: ***|f(x)| > g(x)***
ancora una volta si possono distinguere due casi distinti:
*c) $g(x) \leqslant 0 \Rightarrow$ la disequazione non è **sempre** soddisfatta (ovviamente per tutti gli x appartenenti al dominio di negatività di g(x));*
*b) $g(x) > 0 \Rightarrow$ la disequazione è soddisfatta dalle soluzioni delle due disequazioni (che NON costituiscono sistema) e quindi dall'**unione** dei loro insiemi di verità:*

$$|f(x)| > g(x) \Leftrightarrow \begin{matrix} f(x) > g(x),\ \forall\, x \ni f(x) \geq 0,\ \forall\, x \ni g(x) > 0 \\ \\ f(x) < -g(x),\ \forall\, x \ni f(x) < 0,\ \forall\, x \ni g(x) > 0 \end{matrix}$$

La situazione è schematizzata sinteticamente nella seguente tabella:

Tabella per le disequazioni in valore assoluto		
	$g(x) \leq 0$	**$g(x) > 0$**
$\lvert f(x)\rvert < g(x)$	**MAI soddisfatta**	***Soluzioni del SISTEMA (Intersezione)*** $f(x) - g(x) < 0$ $f(x) + g(x) > 0$
$\lvert f(x)\rvert > g(x)$	**SEMPRE soddisfatta** (ad eccezione dei punti in cui f(x)= 0)	***Soluzioni delle 2 equazioni*** ***(Unione)*** $f(x) - g(x) > 0$ $f(x) + g(x) < 0$

In definitva, il procedimento pratico per la risoluzione di una disequazione che contenga un valore assoluto, $\lvert f(x)\rvert \geq g(x)$ *oppure* $\lvert f(x)\rvert < g(x)$, *implica dapprima la determinazione del segno di g(x) (banale nel caso che g(x) sia una costante) e,* nel caso non si sappia già a priori che la disequazione non è MAI o è SEMPRE soddisfatta,

- *la risoluzione del sistema indicato nella tabella per* $\lvert f(x)\rvert < g(x)$ *e* g(x) > 0 (***intersezione***)
- *la risoluzione delle 2 equazioni indicate nella tebella per* $\lvert f(x)\rvert > g(x)$ *e* $g(x) > 0$ *(**unione**)*

Esempi di applicazione del metodo:

I) Studio della disequazione $\lvert x\rvert < 8$

Dalla prima riga della tabella, visto che g(x) = 8 è certamente positivo, si passa direttamente a risolvere il sistema di disequazioni:

$$\begin{cases} x < 8 \\ x > -8 \end{cases}$$ che corrisponde al sistema risolvente: $$\begin{cases} x-8<0 \\ x+8>0 \end{cases}$$

⊖ ⊕

x – 8 < 0 **---**[8]--------------------------------

⊖ ⊕

x +8 > 0 -----------------[-8]**--**

con un insieme di verità dato dall'***intersezione*** di quello della prima disequazione **]-**∞,**8[** con quello della seconda **]-8,+**∞[, cioè dall'intervallo **]-8,8[** in cui sono soddisfatte ***contemporaneamente*** le due disequazioni.

II) Studio della disequazione |x²+2x-10| < 5 (analogo al precedente)

Dalla prima riga della tabella, visto che g(x) = 5 è certamente positivo, si passa direttamente a risolvere il *sistema* di disequazioni:

$$\begin{cases}(x^2+2x-10)>-5\\(x^2+2x-10)<5\end{cases} \quad \text{che corrisponde al } \textit{sistema} \quad \begin{cases}x^2+2x-5>0\\x^2+2x-15<0\end{cases}$$

⊕ ⊖ ⊕

$x^2+2x-5>0$ **--------------------**[-1-√6]-----------------[-1+√6]**------------------------------------**

⊕ ⊖ ⊕

$x^2+2x-15<0$ ---------[-5]**--**[3]------------------

con un insieme di verità dato dall'***intersezione*** di quello della prima disequazione **]-∞,-1-√6[** ∪ **]-1+√6,+∞[** (indicato dal segno ⊕ nel grafico),

con quello della seconda **]-5,3[** (indicato dal segno ⊖ nel grafico)

e cioè negli intervalli **] -5, -1-√6 [** ∪ **]-1+√6, 3[** in cui sono soddisfatte ***contemporaneamente*** le due disequazioni.

III) Studio della disequazione |x| > 5

Dalla seconda riga della tabella, visto che g(x) = 5 è certamente positivo, si passa direttamente a risolvere le due disequazioni (che, in questo caso, NON costituiscono sistema, per cui dovremo considerare l'unione degli intervalli di verità delle due disequazioni):

$x>5 \rightarrow x-5>0$

$x<-5 \rightarrow x+5<0$

⊖ ⊕

$x-5>0$ ---[5]**---------------------------------**

⊖ ⊕

$x+5<0$ **-----------------**[-5]---

con un insieme di verità dato dall'***unione*** di quello della prima disequazione **]5, +∞[** con quello della seconda **]-∞ ,-5[**

IV)Studio della disequazione |x2 + 5x| > 6 (analogo al precedente)

Dalla seconda riga della tabella, visto che g(x) = 6 è certamente positivo, si passa direttamente a risolvere le due disequazioni (che, in questo caso, NON costituiscono sistema, per cui dovremo considerare l'unione degli intervalli di verità delle due disequazioni):

$$\begin{matrix}x^2+5x>6\\x^2+5x<-6\end{matrix} \quad \text{equivalenti a} \quad \begin{matrix}x^2+5x-6>0\\x^2+5x+6<0\end{matrix} \quad \text{che portano agli insiemi di verità:}$$

⊕ ⊖ ⊕

$x^2+5x-6>0$ **------**[-6]---[1]**--------------------**

⊕ ⊖ ⊕

$x^2+5x+6<0$ ------------------------[-3]**------------**[-2]--

con un insieme di verità dato dalla ***unione*** di quello della prima disequazione

]-∞,-6[∪ **]1,+∞[** (indicato dal segno ⊕ nel grafico), uniti a loro volta con quello della seconda

]-3,-2[(indicato dal segno ⊖ nel grafico).

L'insieme di verità complessivo è dato dunque da: **]-∞,-6[** ∪ **]1,+∞[** ∪ **]-3,-2[**

V) Studio della disequazione |x| > -8

Dalla seconda riga della tabella, visto che g(x) = -8 è certamente negativo, si si deduce che la disequazione è sempre soddisfatta, qualunque sia il valore reale di x.

La disequazione **|f(x)| > -8** è soddisfatta in tutto il dominio di f(x).

VI)**Studio della disequazione |x| < -4**

Dalla prima riga della tabella, visto che g(x) = -8 è certamente negativo, si si deduce che la disequazione non è mai soddisfatta, qualunque sia il valore reale di x.

La disequazione |f(x)| < -4 non è mai soddisfatta in tutto il dominio di f(x).

VII) **Studio della disequazione: $|3x^2 -2x + 1| > 5x^2 – 10x -5$**

1) determinazione del segno di $g(x) = 5x^2 – 10x -5$:

$$\begin{array}{lccccc} & \oplus & & \ominus & & \oplus \\ 5x^2-10x-5 & \text{-----------------}[& \frac{(5-\sqrt{50})}{5} &]\text{---------------------------------}[& \frac{(5+\sqrt{50})}{5} &]\text{-----------} \end{array}$$

Dunque si ha che $g(x) = 5x^2 – 10x -5$ è **positivo** per $]-\infty, \frac{(5-\sqrt{50})}{5}[\cup]\frac{(5-\sqrt{50})}{5}, +\infty[$

e **negativo** per $]\frac{(5-\sqrt{50})}{5}, \frac{(5+\sqrt{50})}{5}[$

2) Dalla seconda riga della tabella si deduce immediatamente che la disequazione è sempre soddisfatta per $x \in]\frac{(5-\sqrt{50})}{5}, \frac{(5+\sqrt{50})}{5}[$ perchè in tale intervallo g(x) risulta negativo, ad esclusione dei punti in cui $f(x) = 3x^2 -2x + 1 = 0$.

3) Per gli altri due intervalli, in cui *g(x) risulta strettamente positivo*, si dovranno risolvere le due disequazioni seguenti (che NON costituiscono sistema e che quindi forniranno come soluzione la *unione* dei rispettivi insiemi di verità):

$$3x^2-2x+1>5x^2-10x-5 \quad \Rightarrow -2x^2+8x+6>0$$

$$3x^2-2x+1<-5x^2+10x\pm5 \quad \Rightarrow 8x^2-12x-46<0$$

$$\textit{ricordando che tali disequazioni potranno essere soddisfatte solo ove } g(x)>0$$

$\ominus$ $\oplus$ $\ominus$

$-2x^2+8x+6>0$ ------[x_1]**---**[x_2]-------------

$\oplus$ $\ominus$ $\oplus$

$8x^2-12x-4<0$ ----------------------[x_3]**------------------**[x_4]---

$\oplus$ $\ominus$ $\oplus$

$5x^2-10x-5>0$ **-------------** [x_5]-------------------------------------[x_6]**-----------------------------**

ove x1= $\dfrac{(-4+\sqrt{28})}{-2}$, x2 = $\dfrac{(-4-\sqrt{28})}{-2}$ (soluzione dell'equazione $-2x^2+8x+6=0$)

x3 = $\dfrac{(6-\sqrt{68})}{8}$, x4 = $\dfrac{(6+\sqrt{68})}{8}$ (soluzioni dell'equazione $8x^2-12x-4=0$)

x5 = $\dfrac{(5-\sqrt{50})}{5}$, x6 = $\dfrac{(5+\sqrt{50})}{5}$ (soluzioni dell'equazione $5x^2-10x-5=0$)

con $x1 < x5 < x3 < x4 < x6 < x2$.

Le prime due disequazioni si possono considerare solo all'interno degli intervalli:

$]-\infty,x5[$ e $]x6,+\infty[$ in cui $g(x) = 5x^2-10x-5$ è positiva.

In conclusione, l'insieme di verità complessivo della disequazione **$|3x^2-2x+1| > 5x^2-10x-5$** è il seguente:

$]x1,x5[\; \cup \;]x6,x2[$ ove è soddisfatta la prima disequazione, mentre la seconda non è mai soddisfatta all'interno dell'intervallo in cui g(x) è positiva.

VIII) Studio della disequazione: $|3x^2-2x+1| < 5x^2-10x-5$

1) determinazione del segno di $g(x) = 5x^2-10x-5$:
   fornisce lo stesso risultato precedente (v. punto 1) sopra)
2) Dalla prima riga della tabella si deduce immediatamente che la disequazione NON è mai soddisfatta per $x \in \left] \dfrac{(5-\sqrt{50})}{5}, \dfrac{(5+\sqrt{50})}{5} \right[$ perchè in tale intervallo g(x) risulta negativo.

3) Per gli altri due intervalli, in cui *g(x) risulta strettamente positivo*, si dovrà risolvere il *sistema* delle due disequazioni seguenti (con un insieme di verità fornito dall'*intersezione* di quelli delle due disequazioni):

$$3x^2-2x+1<5x^2-10x-5 \quad \Rightarrow -2x^2+8x+6<0$$
$$3x^2-2x+1>-5x^2+10x\pm5 \quad \Rightarrow 8x^2-12x-46>0$$

ricordando che tali disequazioni potranno essere soddisfatte solo ove $g(x)>0$

In questo caso, pur essendo luguali le soluzioni delle equazioni corrsipondenti, cambiano gli insiemi di verità, perchè sono opposti i versi:

$\ominus$ $\oplus$ $\ominus$

$-2x^2+8x+6<0$ **------**[x_1]---[x_2]**-------------**

$\oplus$ $\ominus$ $\oplus$

$8x^2-12x-4>0$ **----------------------**[x_3]------------------[x_4]**---**

⊕ ⊖ ⊕

$5x^2 – 10x\ 5>0$ **--------------** $[x_5]$---------------------------------------$[x_6]$**------------------------------**

La prima disequazione è soddisfatta nell'intervallo] -∞, x1 [e nell'intervallo] x2, +∞ [e la seconda nell'intervallo] -∞, x3 [e nell'intervallo] x4, +∞ [;

In conclusione, l'insieme di verità complessivo della disequazione **$|3x^2 -2x + 1| < 5x^2 – 10x -5$** è il seguente:

] -∞, x1 [∪] x2, +∞ [che fornisce l'*intersezione* degli insiemi di verità delle tre disequazioni:

$-2x^2 + 8x + 6 < 0$

$8x^2 -12x -4 > 0$

$5x^2 – 10x – 5 > 0$