Equazioni

Equazioni intere

Un'equazione algebrica (o polinomiale) ha sempre la forma, o può essere ridotta alla forma:

$$P(x) = 0$$

ove P(x) è un polinomio nella variabile x di grado qualsiasi.

Contrariamente alle espressioni algebriche, che nel linguaggio della logica sono trattate come proposizioni, le equazioni rappresentano sempre un *generico problema tradotto in termini matematici* e le eventuali soluzioni individuano i valori della variabile che risolvono tale problema. In altre termini, le soluzioni di un'equazione sono quei valori della variabile x che trasformano l'equazione $P(x) = 0$ in un'uguaglianza vera (del tipo $P(a) = 0$, se a è una soluzione).

Le equazioni si risolvono applicando le due proprietà invariantive delle uguaglianze/equazioni:

I proprietà invariantiva:

Un'uguaglianza (o un'equazione) si trasforma in una equivalente (cioè con le stesse soluzioni) se si sommano (o sottraggono) ad ambo i membri stesse quantità (positive o negative).

La I proprietà si applica ai termini dell'equazione.

La I proprietà comporta il cambio di segno quando un termine viene trasportato da un membro all'altro dell'equazione:

$$x + a = 0 \quad \rightarrow \quad x + a - a = -a \quad \rightarrow \quad x = -a$$

II proprietà invariantiva:

Un'uguaglianza (o un'equazione) si trasforma in una equivalente (cioè con le stesse soluzioni) se si moltiplicano (o dividono) ambo i membri per una stessa quantità (positiva o negativa) purchè essa sia diversa da zero.

La II proprietà si applica ai fattori dell'equazione.

La complessità dei metodi di risoluzione delle equazioni dipende innanzitutto dal grado massimo a cui è elevata l'incognita. Fin dall'antichità sono noti metodi di risoluzione delle equazioni di primo e secondo grado ottenuti con l'uso delle quattro operazioni elementari e con l'estrazione di radici, anche nel caso che il polinomio P(x) sia completo (cioè contenga tutti i termini dal grado massimo a zero); con l'introduzione dei numeri complessi, possiamo affermare che per tutte le equazioni di primo e secondo grado esistono dei metodi codificati che portano alla loro soluzione (se ne esiste una). Per quelle di grado superiore esistono formule molto complicate per le equazioni di terzo e quarto grado, ma è stata dimostrata l'impossibilità di trovarne una per quelle di grado cinque o superiore.

Non riportiamo i metodi delle soluzioni delle equazioni di 1° e 2° grado perchè noti fin dalle scuole medie inferiori.

Il metodo generale per la risoluzione delle equazioni consiste quindi nella scomposizione del

polinomio P(x) in fattori di primo o secondo grado*, e nell'applicazione del principio dell'annullamento del prodotto:*

Il prodotto di due o più polinomi è nullo se almeno uno di essi è zero.

Tutti gli eventuali valori che rendono vera l'equazione $P(x) = 0$ si ottengono quindi annullando singolarmente *tutti* i fattori.

A questa considerazione è legata l'importanza della scomposizione dei polinomi, che abbiamo già esposto nel precedente capitolo e che riassumiamo brevemente qui:

Per la scomposizione di un polinomio in fattori:

1) ***Contare i termini e mettere a fattore l'eventuale M.C.D. di tutti i suoi termini o raccogliere parzialmente (se conveniente);***
2) ***Riconoscere la potenza di un binomio;***
3) ***Riconoscere la somma o differenza di due potenze con ugual esponente;***
4) ***Applicare il teorema di Ruffini;***

La procedura è ricorsiva nel senso che, applicato uno dei metodi soprariportati, si può tentare una successiva scomposizione a ciascun fattore, con gli stessi metodi.

Fra le equazioni che si possono risolvere con questi metodi ricadono quelle

- ***binomie*** (v. punto 3) del tipo: $x^n \pm k = 0$;
- quelle ***complete a coefficienti interi***, del tipo:

$$P(x) = a_n x^n \pm a_{n-1} x^{n-1} \pm \dots \pm a_0 = 0, \text{ con } a_n,\ a_{n-1},\ a_0 \text{ interi},$$

per le quali è possibile applicare il teorema di Ruffini (v. punto 4) utilizzando come divisore il rapporto $\pm p/q$, ove p è un divisore del termine noto a_0 e q è uno dei divisori del termine di grado massimo a_n.

Notare che se il polinomio è a coefficienti razionali, può essere facilmente trasformato in uno a coefficienti interi, moltiplicando tutti i termini per il m.c.m. fra a_0 e a_n.

Notare inoltre che in tal modo si possono trovare solo le soluzioni razionali $x=\pm p/q$.

- quelle ***reciproche di 3° grado*** (divisibili per x+1 se di I tipo e per x-1 se di II tipo)
- quelle ***reciproche di 4° grado*** (divisibili per x-1 e per x+1, se di II tipo)

come conseguenza del teorema di Ruffini.

Ricordiamo che un'equazione si dice reciproca se i coefficienti equidistanti del polinomio ordinato P(x) sono uguali in valore e segno (reciproche di I tipo) oppure solo in valore, ma opposti in segno (reciproche di II tipo).
Esse hanno quindi la seguente struttura:

$a\,x^3 - b\,x^2 - b\,x + a = 0$ (I tipo)

$a\,x^3 + b\,x^2 - b\,x - a = 0$ (II tipo)

$a\,x^4 - b\,x^3 + c\,x^2 - b\,x + a = 0$ (I tipo)

$a\,x^4 - b\,x^3 + b\,x - a = 0$ (II tipo) - notare che manca il termine di 2° grado

Se il polinomio P(x) non è così scomponibile, si può procedere con un altro metodo altrettanto generale:

Si effettua una posizione introducendo una variabile ausiliaria in modo da trasformare l'equazione data in una di primo o secondo grado nella variabile ausiliaria; si risolve poi quest'ultima equazione e si sostituiscono i valori trovati nell'equazione di definizione della variabile ausiliaria.

Facciamo un semplice esempio:
Per risolvere la: $(x^2+x)^2 - 6(x^2+x) +5 = 0$, si ponga: $x^2+x = t$, trasformando l'equazione data in:
$t^2 - 6\,t + 5 = 0$ e si risolva poi il *sistema*:

$$\begin{cases} x^2+x = t \\ t^2 - 6\,t + 5 = 0 \end{cases}$$

partendo ovviamente dalla risoluzione delle seconda equazione per determinare i valori di t che saranno sostituiti poi nella prima.

In matematica è sempre possibile effettuare una qualsiasi posizione, che corrisponde in definitiva ad un cambio di nome delle variabili (anche se non sempre conveniente).

Fra le equazioni che si possono risolvere con una posizione ricadono quelle

- ***biquadratiche*** del tipo:

$a\,x^{2n} \pm b\,x^n \pm c = 0$ per le quali basta porre $x^n = t$ per trasformarle nel sistema:

$$\begin{cases} x^n = t \\ a\,t^2 \pm b\,t \pm c = 0 \end{cases}$$

- quelle ***reciproche di I tipo e di 4° grado***

che si risolvono con la posizione $x + 1/x = t$, con cui l'equazione: $a\,x^4 - b\,x^3 + c\,x^2 - b\,x + a = 0$ si trasforma nel sistema:

$$\begin{cases} x+\dfrac{1}{x}=t \\ a(t^2-2)+bt+c=0 \end{cases}$$

poiché, dividendo per x^4, si ottiene:

$$ax^2+bx+c+\frac{b}{x}+\frac{a}{x^2}=a(x^2+\frac{1}{x^2})+b(x+\frac{1}{x})+c=a(x^2+\frac{1}{x^2}+2-2)+b(x+\frac{1}{x})+c=0$$

Equazioni fratte.

Si dice fratta un'equazione che ha l'incognita a denominatore.

Le equazioni fratte si risolvono trasformandole (con applicazioni delle proprietà invariantive) in un'equazione intera.

Poiché non è noto il valore della variabile x, non si può escludere che esso faccia assumere al denominatore un valore nullo; pertanto, prima di eseguire le operazioni necassarie alla sua trasformazione in una equivalente intera, bisognerà sempre imporre che l'espressione a denominatore contenete l'incognita sia diversa da zero e *tale condizione deve essere sempre riportata esplicitamente durante tutto lo sviluppo dell'equazione*.
In altre parole, un'equazione fratta (rappresentabile con la P(x) / Q(x) = 0, con P(x) e Q(x) polinomi di grado qualunque nella variabile x) ha per soluzioni quelle del sistema:

$$\frac{(P(x))}{(Q(x))}=0$$
$$Q(x)\neq 0$$

Infatti, se ci si dimenticasse di riportare la condizione in un'equazione del tipo:

$$\frac{(x^2-2x-3)}{(x-3)}+x-7=\frac{((x-3)(x+1))}{(x-3)}+x-7=(x+1)+x-7=2x-6=2(x-3)=0$$

si potrebbe assumere come soluzione x = 3, che comporta l'annullamento di (x-3), utilizzato nella semplificazione (divisione) dell'espressione; l'equazione quindi in questo caso non ha soluzione.

Equazioni irrazionali.

E' irrazionale una equazione in cui la variabile compare sotto il segno di radice.
I problemi con questo tipo di equazioni sorgono essenzialmente nel caso che l'indice del radicale sia pari, in quanto, per gli indici dispari è sufficiente elevare ambo i membri all'opportuna potenza.

Nel caso di **indici dispari**, non occorre imporre alcuna condizione di realtà per il radicando in quanto il numero $\sqrt[n]{f(x)}$ con n dispari è reale per tutti i valori di f(x).
Ciò vale in tutti i casi del tipo:

$$f(x)=\sqrt[m]{g(x)}$$
$$\sqrt[n]{f(x)}=\sqrt[m]{g(x)}$$

con n ed m dispari.

Per la risoluzione di un'equazione irrazionale ad indici dispari del tipo: $\sqrt[n]{f(x)}=\sqrt[m]{g(x)}$
si devono elevare ambo i membri alla potenza n-esima (con n dispari) prima e a quella m-esima (con m dispari) poi per ottenere l'equazione equivalente:

$$(f(x))^m=(g(x))^n$$

che, essendo razionale, può essere risolta con i metodi già indicati per le equazioni algebriche.

Per le disequazioni irrazionali ad **indice pari** bisogna invece imporre sempre la *condizione di realtà* per tutti i radicali coinvolti e quindi si deve in ogni caso risolvere un sistema di equazioni/disequazioni: la soluzione sarà rappresentata dall'*intersezione* degli insiemi di verità di tutte le disequazioni del sistema.
Le equazioni irrazionali ad indice pari (cilimitiamo al caso più frequente delle radici quadrate) sono essenzialmente di 2 tipi distinti:

$$I: f(x)=\sqrt{g(x)} \qquad II: \sqrt{f(x)}=\sqrt{g(x)}$$

supponendo, in tutti i casi, che i radicali siano assunti con valore positivo.

I) $f(x)=\sqrt{g(x)}$
che si risolve con il sistema:

$$\begin{array}{ll} g(x)\geq 0 & \textit{condizione di realtà} \\ f(x)\geq 0 & \textit{perchè } f(x)=\sqrt{g(x)} \\ f^2(x)=g(x) & \textit{essendo i due membri positivi} \end{array}$$

tradotto nel sistema risolutivo:

$$\begin{array}{l} f(x)=0 \\ g(x)=0 \\ f^2(x)=g(x) \end{array}$$

II) $\sqrt{f(x)}=\sqrt{g(x)}$
che si risolve con il sistema:

$$\begin{array}{ll} f(x)\geq 0 & \textit{condizione di realtà} \\ g(x)\geq 0 & \textit{condizione di realtà} \\ f(x)=g(x) & \end{array}$$

tradotto nel sistema risolutivo:

$$\begin{array}{l} f(x)=0 \\ g(x)=0 \\ f(x)=g(x) \end{array}$$

Equazioni in valore assoluto.
Per definizione, si ha:

$$\begin{array}{l} |f(x)|=f(x) \quad x\in R:\ f(x)\geq 0 \\ |f(x)|=-f(x) \quad x\in R:\ f(x)<0 \end{array}$$

La funzione dunque non assume mai valori negativi.

Un'equazione del tipo $|f(x)|=k, con\ k<0$ ***non ha soluzione.***

Un'equazione del tipo $|f(x)|=k, con\ k\geq 0$ ***o una del tipo*** $|f(x)|=g(x)$ ***ha soluzioni che dipendono dal valore di x.***

Analizziamo dapprima la: $|f(x)| = k$, ***con*** $k \geq 0$

Si verificano due casi distinti:

a) $f(x) \geq 0 \Rightarrow f(x) = k$

b) $f(x) < 0 \Rightarrow f(x) = -k$

e le soluzioni dell'equazione sono date dall'*unione* di quelle delle due equazioni.

Ad esempio:

$|x-3| = 1$ equivale alle due equazioni:

$x - 3 = 1$, con soluzione $x = 4$ (quando $x-3 >0$, cioè $x > 3$)

$x - 3 = -1$, con soluzione $x = 2$ (quando $x-3 < 0$, cioè $x < 3$)

Quando x=3, l'equazione non ha soluzione.

Passiamo ora alla: $|f(x)| = g(x)$

In questo caso si dovrà comunque verificare che $g(x) \geq 0$ perchè in caso contrario l'equazione non potrebbe mai essere soddisfatta. Pertanto un'equazione di questo tipo si traduce nei due sistemi seguenti:

$$\begin{cases} g(x) \geq 0 \\ f(x) \geq 0 \\ f(x) = g(x) \end{cases} \quad e \quad \begin{cases} g(x) \geq 0 \\ f(x) < 0 \\ f(x) = -g(x) \end{cases}$$

Ad esempio:

$|x^2-3x-7| = 2x-4$ equivale ai due sistemi:

$$\begin{cases} 2x-4 \geq 0 \\ x^2-3x-7 \geq 0 \\ x^2-3x-7 = 2x-4 \end{cases} \quad e \quad \begin{cases} 2x-4 \geq 0 \\ x^2-3x-7 < 0 \\ x^2-3x-7 = -2x+4 \end{cases}$$

graficamente rappresentati da:

```
                         ⊖                                  ⊕
2x-4  -------------------------------------------[2]-------------------------------------------------------
                ⊕                            ⊖                             ⊕
x²-3x-7  --------------------[x1]-------------------------------[x2]-------------------------------------------
x²-5x-3  ----[x3]---------------------------------------------------------------------------[x4]-------------
```

ove $x_1 = \dfrac{(3-\sqrt{37})}{2}$, $x_2 = \dfrac{(3+\sqrt{37})}{2}$, $x_3 = \dfrac{(5-\sqrt{37})}{2}$, $x_4 = \dfrac{(5+\sqrt{37})}{2}$

Dunque il primo sistema ha per soluzione x_3 visto che solo per questo valore di x risulta: $2x-4 \geq 0$ e

x^2-3x-7 $\geq$ 0 (primo sistema).

Mentre per il secondo sistema si ha:

⊖ ⊕

2x-4 ---**[2]---**

⊕ ⊖ ⊕

x^2-3x-7 ---------------[x_1]**---**[x_2]--------------------------------

x^2-5x-3 -----------------------------**[x_3]**-----------------**[x_4]**--

ove $x_1 = \dfrac{(3-\sqrt{37})}{2}$, $x_2 = \dfrac{(3+\sqrt{37})}{2}$, $x_3 = \dfrac{(1-\sqrt{45})}{2}$, $x_4 = \dfrac{(1+\sqrt{45})}{2}$

e quindi l'unica soluzione accettabile è fornita da x_4 perchè solo per essa risulta:
2x-4 $\geq$ 0 e x^2-3x-7 **<** 0 (secondo sistema). In definitiva l'equazione: $|x^2-3x-7| = 2x-4$ ha per soluzioni $x = \dfrac{(5+\sqrt{37})}{2}$ e $x = \dfrac{(1+\sqrt{45})}{2}$