Equazioni goniometriche

Premettiamo la definizione di funzione periodica:
Una funzione f(x) è periodica di periodo T se si verifica che:

$$f(x \pm kT) = f(x) \qquad con\ k=0,1,2,3,....$$

cioè se la funzione assume lo stesso valore (in valore e segno) in x, $x\pm T$, $x\pm 2T$, $x\pm 3T$,....

Tipiche funzioni periodiche sono quelle goniometriche: sin(x), cos(x), tan(x) di cui ci occuperemo dettagliatamente.
Le funzioni sin(x) e cos(x) sono periodiche di periodo $T = 2\pi$,
mentre la funzione tan(x) è periodica di periodo $T = \pi$.

Pertanto, ad esempio, $\sin(x+10\pi) = \sin(x-6\pi) = \sin(x)$, ma $\sin(x+3\pi) \neq \sin(x)$.

Per quanto riportato sopra, lo studio di una funzione periodica qualunque, ed in particolare di una funzione goniometrica, può essere effettuato *in un qualsiasi intervallo di valori di ampiezza pari al rispettivo periodo T*, in quanto essa assume tutti i valori compresi tra il suo minimo ed il suo massimo.
Sulla base di questa osservazione si può facilmente delineare una procedura generale per lo studio di una qualsiasi funzione periodica (e quindi anche per la risoluzione delle relative equazioni e disequazioni):

1) ***si studi la funzione (o si risolva l'equazione o disequazione assegnata) in un qualsiasi intervallo di ampiezza pari al periodo della funzione ;***
2) ***si determinino tutti gli altri valori possibili (che sono sempre infiniti) aggiungendo algebricamente un qualsiasi numero di periodi T ai valori determinati al punto 1).***

Le difficoltà della ricerca delle soluzioni nascono da tre fattori distinti:

1. il numero delle funzioni presenti
2. il grado delle funzioni
3. l'uguaglianza o meno degli argomenti delle funzioni
4. il fatto che siano o meno omogenee (cioè che non abbiano o abbiano un termine noto)

Esaminiamo quindi il problema dapprima considerando il caso di <u>una sola funzione</u>:
La forma generale sarà del tipo $\sin(f(x)) = m$, con $-1 \le m \le 1$ perchè al di fuori di tale intervallo l'equazione non ha certamente soluzione.
L'equazione si risolve sempre con il sistema:

$$y = f(x)$$
$$\sin(y) = m$$

trovando le soluzioni di: $sin(y) = m$ e sostituendo tutti i valori trovati nella prima: $y = f(x)$, per ottenere le soluzioni cercate in funzione di x.

Lo stesso metodo si applica ovviamente anche all'equazione cos(f(x)) = m, con la stessa limitazione per il valore di m, mentre per l'equazione tan(f(x)) = m, non si hanno limitazioni per il valore di m. Il primo problema da risolvere è dunque quello di trovare le soluzioni dell'equazione *sin(y) = m*, o *cos(y) = m* o ancora *tan(y) = m*, con le limitazioni già indicate per la costante m.

Vista la periodicità delle funzioni ($\mp 2k\pi$ per il seno ed il coseno e $\mp k\pi$ per la tangente), è sufficiente trovare quelle comprese in $[0,2\pi]$, sia per il seno che per il coseno e in $]-\pi/2,+\pi/2[$ per la tangente, e poi aggiungere ad esse la periodicità indicata.

Le funzioni goniometriche hanno come argomento angoli espressi in radianti e quindi un'equazione del tipo: cos(x) = - 0.5 ha per soluzione l'insieme costituito da tutti gli infiniti valori degli angoli x che hanno un coseno uguale a - 0.5.

Da un punto di vista pratico, non potremo di conseguenza rappresentare tutte le soluzioni su un asse, come fatto nei casi delle equazioni e disequazioni algebriche.
Per di più, a causa della periodicità di tali funzioni, non potremo individuare il segno di un 'termine dominante', che non esiste più, e quindi, per stabilire il segno del polinomio a primo membro dell'equazione in tutti gli intervalli (che ora sono infiniti), dovremo calcolare il segno in un qualsiasi intervallo, alternando o meno i segni negli intervalli successivi o precedenti.
Facciamo un semplicissimo esempio: le soluzioni dell'equazione sin(x) = $\sqrt{2}/2$ sono:

$\frac{1}{4}\pi$ e $\frac{3}{4}\pi$ (in $[0,2\pi[$) e quindi, sull'intero asse reale: $\frac{1}{4}\pi \pm 2k\pi$ e $\frac{3}{4}\pi \pm 2k\pi$
con la seguente rappresentazione grafica per l'intervallo $]-2\pi , +2\pi[$

⊕ ⊖ ⊕ ⊖ ⊕ ⊖

----------[-7/4π]---------[-5/4π]------------[¼π]------------[3/4π]------------[9/4π]---------

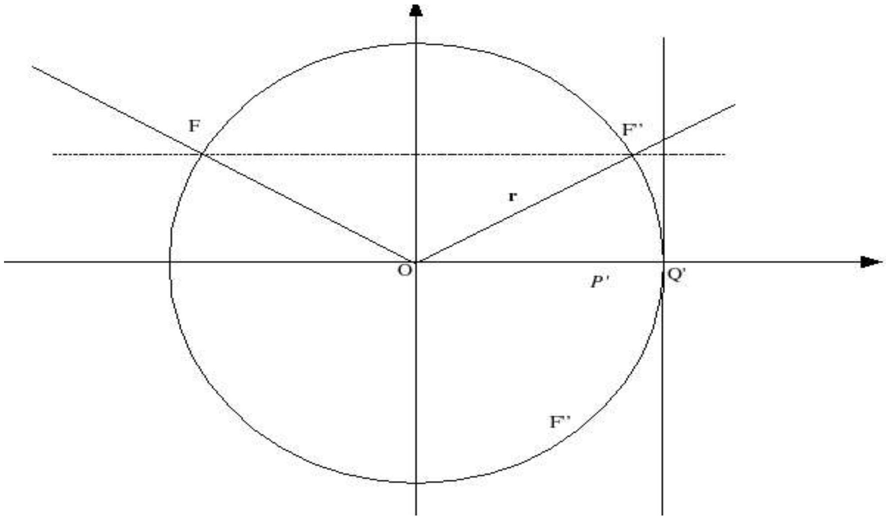
ove i segni sono stati stabiliti con le solite regole a partire dal calcolo effettuato in $]-5/4\pi,\frac{1}{4}\pi[$.

Per la risoluzione delle equazioni goniometriche possiamo utilizzare sia la circonferenza goniometrica che la rappresentazione grafica delle funzioni.
Anche se i metodi da impiegare per la risoluzione sono tra loro simili, bisogna trattare le singole funzioni separatamente.

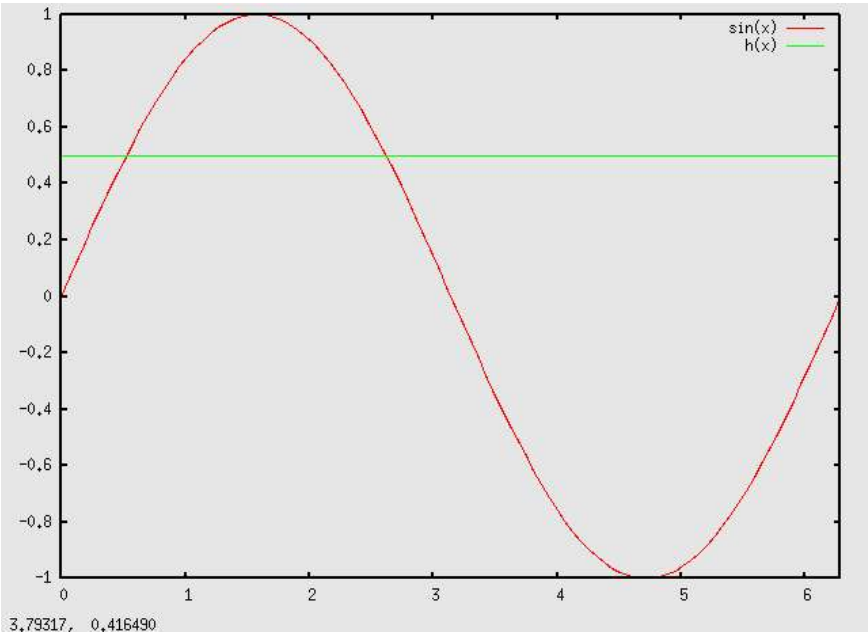
Nota: G***li angoli sono espressi in radianti, misurati in senso antiorario. Gli angoli negativi sono quindi misurati in senso orario.***

Risoluzione dell'equazione sin(y) = m, con m$\in$ [-1,1] e con y [0, 2π [
Utilizzando la circonferenza goniometrica:
a) si individui, sull'asse delle *ordinate* della circonferenza, il valore m del sin(y);
b) a partire da tale punto, si tracci la parallela all'altro asse, che tagliera' la circonferenza in due punti F e F' o sara' ad essa tangente (quando m = $\pm$ 1);
c) le soluzioni dell'equazione, nell'intervallo $[0,2\pi[$, sono quegli angoli al centro Q'OF' e Q'OF, misurati in radianti ed in senso antiorario; nel caso che m = 1, la soluzione sara' $\pi/2$,

mentre per m = -1 sarà $3/2\pi$



Utilizzando il grafico della funzione:



Le soluzioni, espresse in radianti ed in senso orario, saranno le ascisse delle intersezioni della retta, parallela all'asse delle ascisse, condotta per il valore m del sin(y).

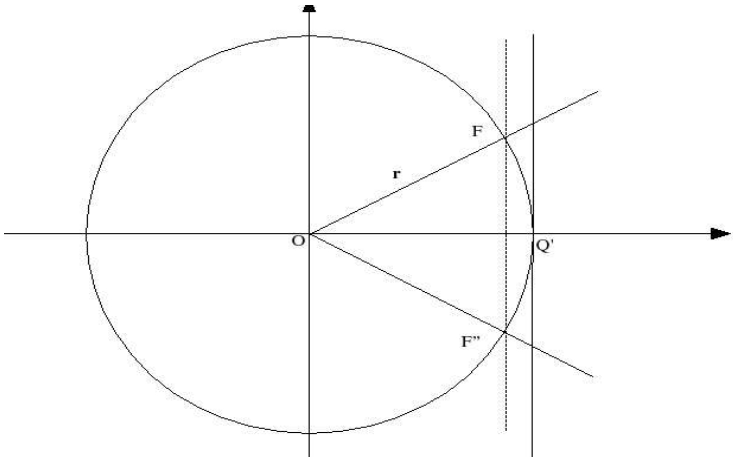
Risoluzione dell'equazione cos(y) = m, con m∈ [-1,1] e con y [0, 2π [

Utilizzando la circonferenza goniometrica:

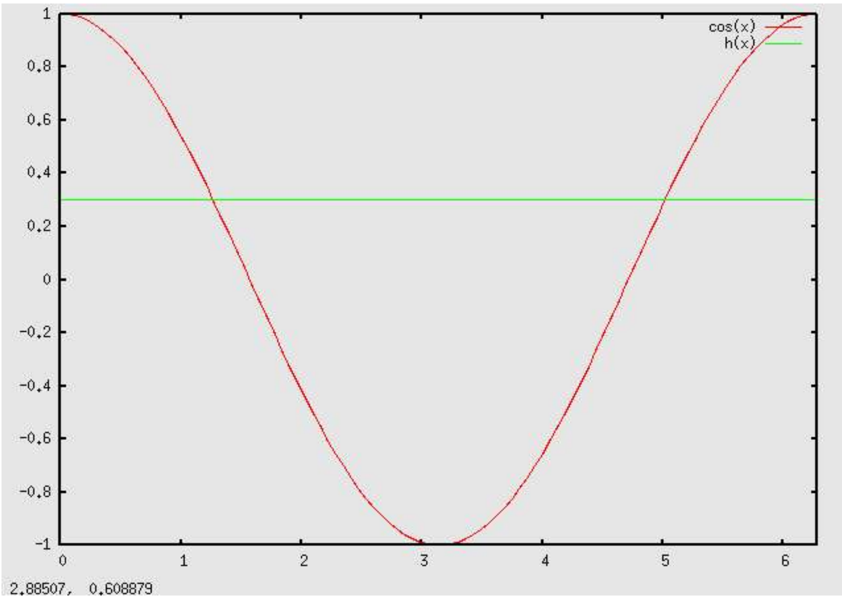
a) si individui, sull'asse delle ascisse della circonferenza, il valore m del cos(y);

b) a partire da tale punto, si tracci la parallela all'altro asse, che tagliera' la circonferenza in due punti F e F" o sara' ad essa tangente (quando k = $\pm$ 1);

c) le soluzioni dell'equazione, nell'intervallo [0,2π[, sono gli angoli al centro Q'OF e Q'OF”, misurati in radianti ed in senso antiorario; nel caso che m = 1, la soluzione sara' 0, mentre per m = -1 sarà π



Utilizzando il grafico della funzione:



Le soluzioni, espresse in radianti ed in senso orario, saranno le ascisse delle intersezioni della retta, parallela all'asse delle ascisse, condotta per il valore m del cos(y).

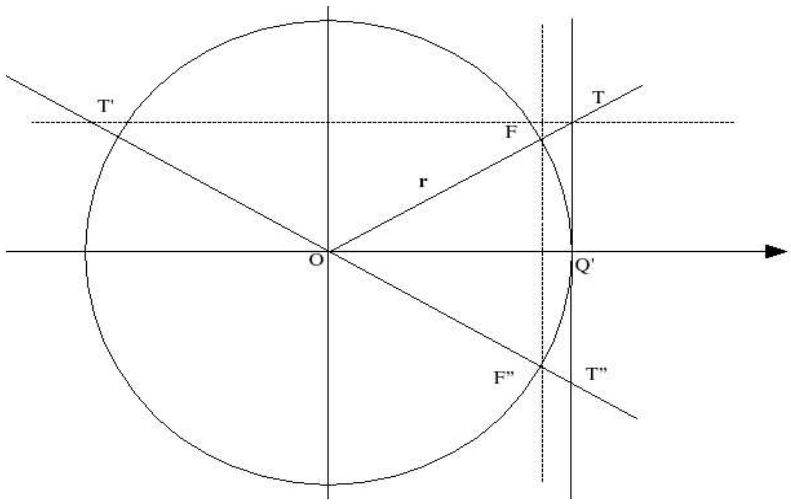
Risoluzione dell'equazione tan(y) = m, con m$\in$ [-∞,+∞] e con y] -π/2, π/2 [

Utilizzando la circonferenza goniometrica:

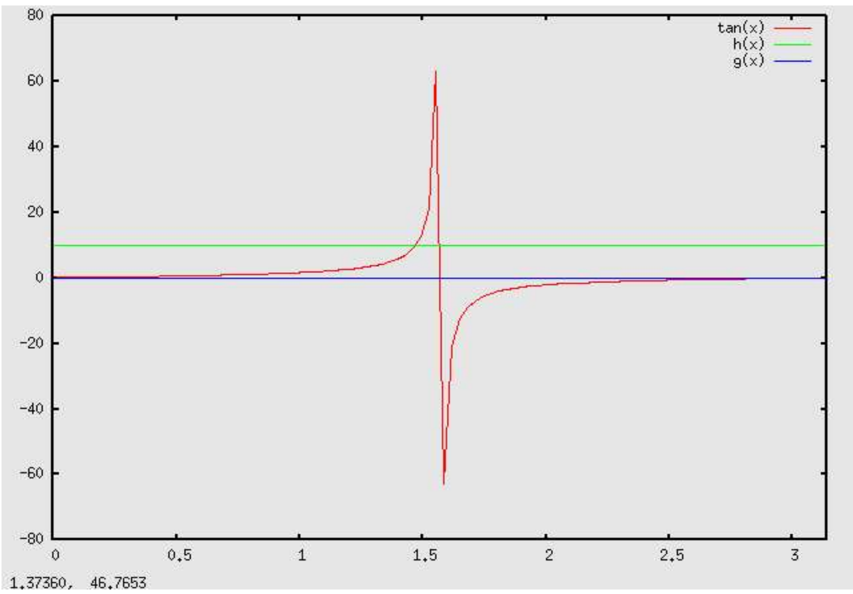
a) si individui, sull'asse delle ordinate della circonferenza, il valore m della tan(y);

b) a partire da tale punto, si tracci la parallela all'altro asse (che in questo caso non necessariamente tagliera' la circonferenza); questa parallela incontrera' la retta tangente alla circonferenza per il

punto Q' in un punto T;
c) si unisca il punto T con l'origine O, individuando in tal modo il punto F di intersezione con la circonferenza (nel caso che m > 0) o il punto F”, costruito allo stesso modo sull'asse nagativo (quando m < 0);
d) la soluzione dell'equazione, nell'intervallo] **-π/2, π/2** [, è Q'OT (quando m è positivo) o Q'OT' (quando m è negativo), misurati in radianti ed in senso antiorario per valori positivi ed in senso orario per valori negativi;



<u>Utilizzando il grafico della funzione:</u>



Le soluzioni, espresse in radianti ed in senso orario, saranno le ascisse delle intersezioni della retta, parallela all'asse delle ascisse, condotta per il valore m della tan(y).

Per comodità del 'lettore', riportiamo di seguito alcuni valori delle tre funzioni per angoli che frequentemente si incontrano negli esercizi assegnati in classe e per i rispettivi periodi:

Valori del **seno** dell'angolo:

0 **0°**	**π/6** **30°**	**π/4** **45°**	**π/3** **60°**	**π/2** **90°**	**2/3π** **120°**	**3/4π** **135°**	**5/6π** **150°**	**π** **180°**	**7/6π** **210°**	**5/4π** **225°**	**4/3π** **240°**	**3/3π** **270°**	**5/3π** **300°**	**7/4π** **315°**	**11/6π** **330°**	**2π** **360°**
0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{-\sqrt{2}}{2}$	$\frac{-\sqrt{3}}{2}$	-1	$\frac{-\sqrt{3}}{2}$	$\frac{-\sqrt{2}}{2}$	$\frac{-1}{2}$	0

Valori del **coseno** dell'angolo:

0 **0°**	**π/6** **30°**	**π/4** **45°**	**π/3** **60°**	**π/2** **90°**	**2/3π** **120°**	**3/4π** **135°**	**5/6π** **150°**	**π** **180°**	**7/6π** **210°**	**5/4π** **225°**	**4/3π** **240°**	**3/3π** **270°**	**5/3π** **300°**	**7/4π** **315°**	**11/6π** **330°**	**2π** **360°**
1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{-1}{2}$	$\frac{-\sqrt{2}}{2}$	$\frac{-\sqrt{3}}{2}$	-1	$\frac{-\sqrt{3}}{2}$	$\frac{-\sqrt{2}}{2}$	$\frac{-1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1

Valori della **tangente** dell'angolo:

-π/2 **-90°**	**-π/3** **-60°**	**-π/4** **-45°**	**-π/6** **-30°**	**0** **0°**	**π/6** **30°**	**π/4** **45°**	**π/3** **60°**	**π/2** **90°**
∞	$-\sqrt{3}$	-1	$\frac{-\sqrt{3}}{3}$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	∞

I due metodi grafici sopra utilizzati servono a risolvere le equazioni goniometriche nei casi che capitano più frequentemente, cioè quando m corrisponde ad un valore noto della funzione considerata; in caso diverso, si dovrà ricorrere alle tavole dei valori delle funzioni goniometriche o all'uso di una calcolatrice o di un computer, ma in ogni caso, hanno il pregio notevole di individuare *tutte* le possibili soluzioni all'interno del periodo; senza la rappresentazione grafica, capita spesso infatti di 'dimenticare' qualche soluzione (trascurando così una infinità di valori..). Ad esempio, l'equazione sin(y) = 0,5 ha certamente come soluzione y = π/4, ma ha anche 3/4 π , che viene spesso dimenticata.
Una volta determinate le soluzioni all'interno del periodo della funzione considerata, tutte le altre soluzioni dell'equazione goniometrica si ottengono aggiungendo e togliendo ad esse un numero qualsiasi di periodi; ad esempio, se le soluzioni dell'equazione sin(y) = m sono, nel periodo 2π , y_1 ed y_2, tutte le altre soluzioni si possono scrivere sinteticamente:

$$y_1 \pm 2k\pi \text{ , con k=0,1,2,3,... e } y_2 \pm 2k\pi \text{ , con k=0,1,2,3,...}$$

Analogamente per l'equazione cos(y) = m.
Per l'equazione tan(y) = m, bisogna tener presente che il periodo della funzione è π, e quindi tutte le soluzioni si possono scrivere nel seguente modo:

$$y_1 \pm k\pi \text{ , con k=0,1,2,3,...}$$

se y_1 è la soluzione trovata all'interno del periodo e che la funzione ha come *punti singolari in cui* *non è definita, tutti i valori di x = π/2 ± kπ.*

Quanto detto sopra è valido anche nel caso in cui l'equazione sia del tipo:
sin(f(x)) = m, cos(f(x)) = m o tan(f(x)) = m, ove f(x) è una funzione reale di variabile reale.

Facciamo un esempio concreto di applicazione del metodo al caso che la funzione f(x), argomento del seno, sia f(x) = 3x – 5 e quindi che si debba risolvere la:

$$\sin(3x-5) = 0{,}5$$

Si faccia la posizione y = 3x-5 e si risolva il sistema:

$$y = 3x-5$$
$$\sin(y) = 0{,}5$$

Partendo dalla seconda equazione, si ottiene facilmente:

$$y_1 = 1/4\ \pi \pm 2k\pi \text{ , con } k=0,1,2,3,\ldots \text{ e } y_2 = 3/4\ \pi \pm 2k\pi \text{ , con } k=0,1,2,3,\ldots$$

A questo punto, per determinare i valori richiesti di x, si sostituiscano nella prima equazione del sistema ottenendo le soluzioni:

$$3x-5=\frac{1}{4}\pi\pm 2k\pi \;\rightarrow\; x=\frac{1}{12}\pi\pm\frac{2}{3}\pi+\frac{5}{3} \quad con\, k=0,1,2,3,\ldots$$
$$3x-5=\frac{3}{4}\pi\pm 2k\pi \;\rightarrow\; x=\frac{3}{12}\pi\pm\frac{2}{3}\pi+\frac{5}{3} \quad con\, k=0,1,2,3,\ldots$$

La procedura si complica leggermente se l'unica funzione dell'equazione è elevata ad una qualsiasi potenza; ad esempio, per l'equazione:

$$\sin^2(3x-1) = 1/2$$

si risolva il *sistema*:

$$y = 3x-1$$
$$z = \sin(y)$$
$$z^2 = 1/2$$

partendo ovviamente dalla risoluzione dell'ultima equazione e sostituendo poi i valori trovati nelle precedenti:

$$\begin{array}{lcl} z_1=\dfrac{1}{\sqrt{(2)}} & & \sin(y)=\dfrac{1}{\sqrt{(2)}} \;\rightarrow\; y_1=\dfrac{\pi}{4}\pm 2k\pi \quad e \quad y_2=\dfrac{3}{4}\pi\pm 2k\pi \\ & \Rightarrow & \\ z_2=-\dfrac{1}{\sqrt{(2)}} & & \sin(y)=-\dfrac{1}{\sqrt{(2)}} \;\rightarrow\; y_3=\dfrac{5}{4}\pi\pm 2k\pi \quad e \quad y_4=\dfrac{7}{4}\pi\pm 2k\pi \end{array}$$

e infine:

$$x_1=\frac{(\frac{1}{4}\pi\pm 2k\pi+1)}{3} \qquad x_2=\frac{(\frac{3}{4}\pi\pm 2k\pi+1)}{3}$$
$$x_3=\frac{(\frac{5}{4}\pi\pm 2k\pi+1)}{3} \qquad x_4=\frac{(\frac{7}{4}\pi\pm 2k\pi+1)}{3}$$

Normalmente, nelle Scuole, non vengono richiesti calcoli così complicati....ma comunque è utile conoscere la metodologia generale per risolvere anche questi problemi....

Sempre nell'ambito del caso ad <u>una sola funzione goniometrica</u>, ricadono equazioni del tipo:

$$\sin(f(x)) = \sin(g(x))$$

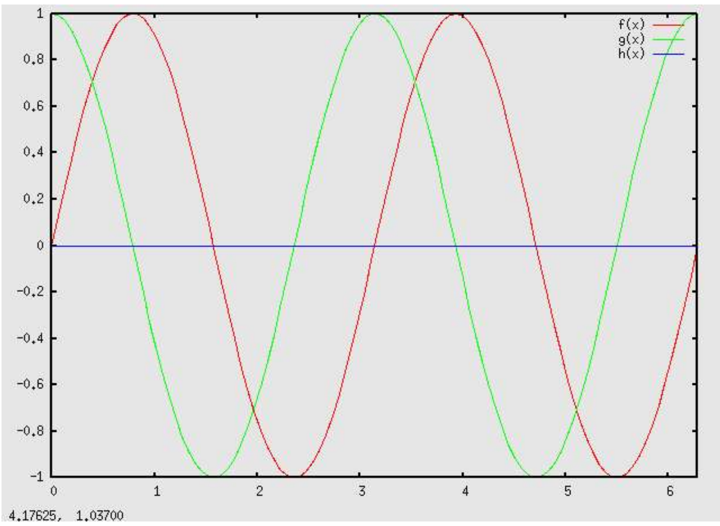
o analoghe per il coseno e la tangente, in cui *gli argomenti dell'unica funzione sono tra loro diversi*.
In questi casi, bisogna tener presente che l'uguaglianza dei valori delle due funzioni comporta sia quella degli argomenti (a meno del periodo), che quella degli angoli ad essi associati, distinti per ciascuna funzione:
l'equazione sin(f(x)) = sin(g(x)) è soddisfatta sia per $f(x) = g(x) \pm 2k\pi$ che per $f(x) = \pi - g(x) \pm 2k\pi$;
l'equazione cos(f(x)) = cos(g(x)) è soddisfatta sia per $f(x) = g(x) \pm 2k\pi$ che per $f(x) = -g(x) \pm 2k\pi$;
mentre l'equazione tan(f(x)) = tan(g(x)) è soddisfatta solo per $f(x) = g(x) \pm k\pi$.
Ad esempio:

$$cos(2x) = cos(5x)$$

ha per soluzioni:

$$2x = 3x \pm 2k\pi \quad e \quad 2x = -3x \pm 2k\pi$$
$$da\,cui:$$
$$x_1 = \pm 2k\pi \quad e \quad x_2 = \pm \frac{2}{5} k\pi$$

Nel caso che le funzioni con cui è espressa l'equazione siano tra loro diverse, ma l'equazione sia omogenea (cioè senza termine noto), si dovrà *operare con le trasformazioni per unificarle in una stessa funzione, utilizzando multipli dispari di $\pi/2$ che fanno corrispondere al cos(y) il sin(y) o viceversa* e procedere poi con i metodi sopra esposti.
In alternativa è possibile utilizzare un metodo grafico, come nell'esempio in cui si suppone di risolvere la *sin(2x) = cos(2x)*:



Nel caso che le due funzioni siano cos(f(x)) e sin(f(x)), è possibile dividere ambo i membri per il coseno, escludendo però tutti i valori degli angoli che annullano il cos(f(x)):

$$x \neq \pi/2 \mp k\pi)$$

che sono *punti in cui il polinomio cambia di segno.*

Può comunque accadere che non sia possibile unificare le funzioni in cui è espressa l'equazione: in questo caso, potremo risolvere in maniera elementare solo alcuni tipi:

Equazione del tipo: **a sin(x) + b cos(x) = 0**

Dividere ambo i membri per cos(x), escludendo i valori di x per cui cos(x) = 0, per ottenere la:

$$a\tan(x) + b = 0, \text{ con } x \neq \pi/2 \pm k\pi$$

che si risolve con il sistema:

$$y = \tan(x)$$
$$a\,y + b = 0$$
$$\cos(x) \neq 0$$

Equazione del tipo: **a sin²(x) + b sin(x)cos(x) +c cos²(x) = 0**

Dividere ambo i membri per $\cos^2(x)$, escludendo i valori di x per cui cos(x) = 0, per ottenere la:

$$a\tan^2(x) + b\tan(x) + c = 0, \text{ con } x \neq \pi/2 \pm k\pi$$

che si risolve con il sistema:

$$y = \tan(x)$$
$$a\,y^2 + b\,y + c = 0$$
$$\cos(x) \neq 0$$

Equazione del tipo: **a sin(x) + b cos(x) + c = 0** (non omogenea di 1° grado):

Utilizzare la trasformazione $\sin(x) = \frac{(2\tan(\frac{x}{2}))}{(1+\tan^2(\frac{x}{2}))}$ $\cos(x) = \frac{(1-\tan^2(\frac{x}{2}))}{(1+\tan^2(\frac{x}{2}))}$ per unificare la funzione e risolvere quindi il sistema

$$y = \tan(x/2)$$
$$(c-b)\,y^2 + 2a\,y + b + c = 0$$
$$\cos(x/2) \neq 0$$

Equazione del tipo: **a sin²(x) + b sin(x)cos(x) +c cos²(x) + d = 0** (non omogenea di 2° grado):

Moltiplicare il termine noto per: $\cos^2(x)+\sin^2(x)$, che è uguale ad 1, e raccogliere a fattor comune:

$$(a+d)\sin^2(x) + b\sin(x)\cos(x) + (c+d)\cos^2(x) = 0$$

dividere quindi per $\cos^2(x)$, con $x \neq \pi/2 \pm k\pi$, ottenendo la:

$$(a+d)\tan^2(x) + b\tan(x) + (c+d) = 0$$

che si risolve col sistema:

$$\begin{cases} y = \tan(x) \\ (a+d)\,y^2 + b\,y + (c+d) = 0 \\ \cos(x) \neq 0 \end{cases}$$

Ovviamente, questo elenco è del tutto incompleto, ma copre i casi che normalmente vengono sviluppati in classe.

Possiamo raggruppare i casi esaminati nella seguente tabellina riassuntiva delle equazioni goniometriche:

Tipo di equazione	*Metodo risolvente*
sin(f(x)) = m **[una sola funzione]**	Risolvere il sistema: $y = f(x)$ $\sin(y) = m$
cos(f(x)) = m **[una sola funzione]**	Risolvere il sistema: $y = f(x)$ $\cos(y) = m$
tan(f(x)) = m **[una sola funzione]**	Risolvere il sistema: $y = f(x)$ $\tan(y) = m$
sin(f(x)) = sin(g(x)) **[la** *stessa funzione* **nei 2 membri con argomenti diversi]** **[*equazioni lineari omogenee*]**	$f(x) = g(x) \pm 2k\pi$ e anche $f(x) = \pi - g(x) \pm 2k\pi$
cos(f(x)) = cos(g(x)) **[la** *stessa funzione* **nei 2 membri con argomenti diversi]** **[*equazioni lineari omogenee*]**	$f(x) = g(x) \pm 2k\pi$ e anche $f(x) = - g(x) \pm 2k\pi$
tan(f(x)) = tan(g(x)) **[la** *stessa funzione* **nei 2 membri con argomenti diversi]** **[*equazioni lineari omogenee*]**	$f(x) = g(x) \pm k\pi$

Tipo di equazione	***Metodo risolvente***
sin(f(x)) = cos(f(x)) **[***funzioni diverse* **nei 2 membri** **con lo stesso argomento]** **[*equazioni lineari omogenee*]**	Dividere ambo i membri per cos(f(x)) e risolvere il sistema: y=f(x) tan(y) = 1 *cos(y)* $\neq 0$ *escludendo quindi i valori degli angoli:* x = ($\pm$2k+1)π/2 , ***punti in cui il polinomio cambia di segno.***
a sin(f(x)) = b cos(f(x)) **[***funzioni diverse* **nei 2 membri** **con lo stesso argomento,** *con a , b ≠ 0***]** **[*equazioni lineari omogenee*]**	Dividere ambo i membri per cos(f(x)) e risolvere il sistema: y=f(x) tan(y) = b/a *cos(y)* $\neq 0$ *escludendo quindi i valori degli angoli:* x = ($\pm$2k+1)π/2 , ***punti in cui il polinomio cambia di segno.***
a sin(f(x)) + b cos(f(x)) + c = 0 **[***funzioni diverse* **con lo stesso argomento,** *con a , b , c ≠ 0***]** **[*equazioni lineari non omogenee*]**	Esprimere sin(f(x)) e cos(f(x)) in funzione di tan(f(x)/2) e risolvere il sistema: *y = tan(f(x)/2)* $(c-b)\, y^2 + 2a\, y + b + c = 0$ *cos(f(x)/2)* $\neq 0$ *escludendo quindi i valori degli angoli:* x = *($\pm$2k+1)π/2*, ***punti in cui il polinomio cambia di segno.***
a sin^2(f(x)) + b sin(f(x)) cos(f(x)) + **+ c cos^2(f(x)) = 0** **[***funzioni diverse* **con lo stesso argomento,** *con a , b , c ≠ 0***]** **[*equazioni di 2° grado omogenee*]**	Dividere ambo i membri per cos^2(f(x)) e risolvere il sistema: *y = tan(f(x))* $a\, y^2 + b\, y + c = 0$ *cos(f(x))* $\neq 0$ *escludendo però tutti i valori degli angoli che annullano il cos(f(x)):* x = *($\pm$2k+1)π/2*, che sono ***punti in cui il polinomio cambia di segno.***

Tipo di equazione	***Metodo risolvente***
a $\sin^2(f(x))$ + b $\sin(f(x))\cos(f(x))$ + **+ c $\cos^2(f(x))$ + d = 0** [*funzioni diverse* **con lo stesso argomento,** *con a , b , c , d ≠ 0*] [***equazioni di 2° grado non omogenee***]	Moltiplicare il termine noto per: $\cos^2(f(x))+\sin^2(f(x))$; dividere poi per $\cos^2(f(x))$ e risolvere il sistema: $y = \tan(f(x))$ $(a+d)\, y^2 + b\, y + (c+d) = 0$ $f(x) \neq (\pm 2k+1)\pi/2$ *escludendo però tutti i valori degli angoli che annullano il cos(f(x)):* $x \neq (\pm 2k+1)\pi/2$, *che sono* ***punti in cui il polinomio cambia di segno.***

Esempi di applicazione.

1) sin(f(x)) = m

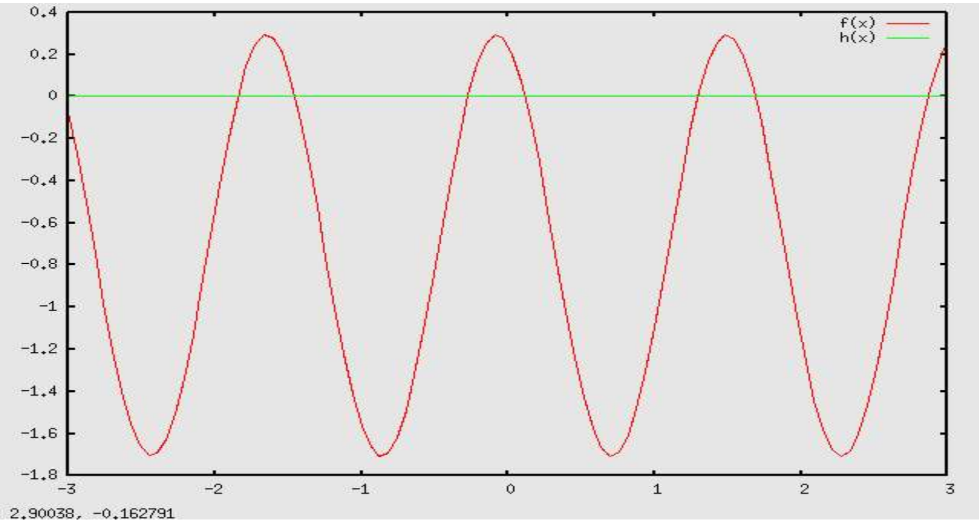
Esempio:

$$\sin(\frac{2}{5}\pi - 4x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$ Si risolva il sistema: $$\begin{cases} y = \frac{2}{5}\pi - 4x \\ \sin(y) = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

che in [0,2π] fornisce le soluzioni: $y_1 = \frac{3}{4}\pi$ e $y_2 = \pi/4$, da cui:

$$x_1 = -\frac{7}{80}\pi \pm k\frac{\pi}{2} \quad e \quad x_2 = \frac{3}{80}\pi \pm k\frac{\pi}{2}$$

con la rappresentazione grafica fornita dalla:



2) cos(f(x)) = m

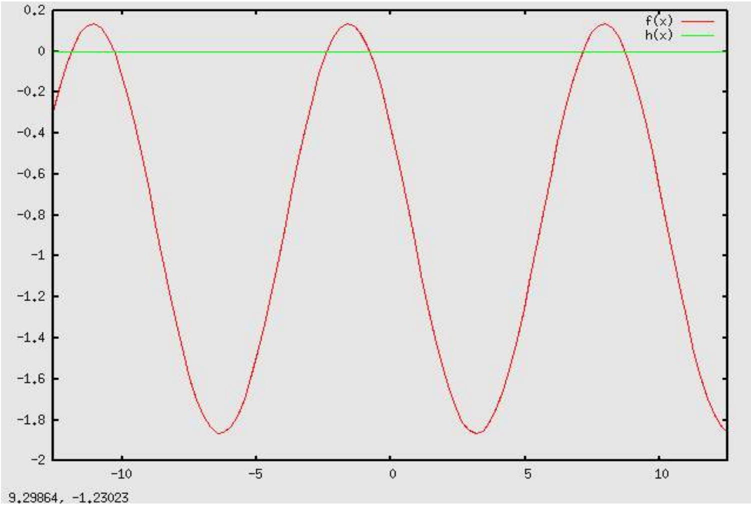
Esempio:

$$\cos(\frac{2}{3}x + \frac{\pi}{3}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$ Si risolva il sistema: $$\begin{cases} y = \frac{2}{3}x + \frac{\pi}{3} \\ \cos(y) = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

che in [0,2π] fornisce le soluzioni: $y_1 = \pi/3$ e $y_2 = 2/3\pi$, da cui:

$$x_1 = \pm 3k\pi \quad e \quad x_2 = \frac{\pi}{2} \pm 3k\pi$$

con la rappresentazione grafica fornita dalla:



<u>3) tan(f(x)) = m</u>

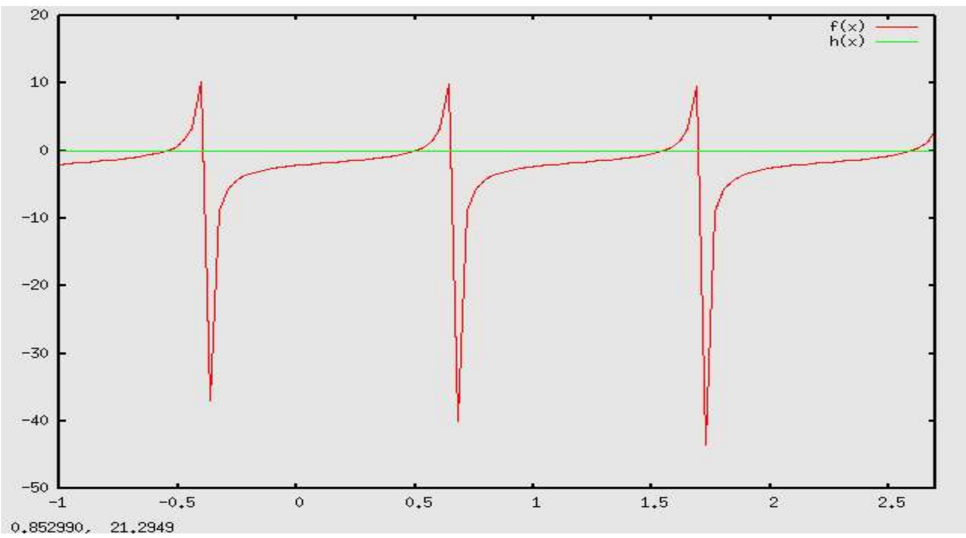
Esempio:

$$\tan(3x-\frac{\pi}{7})=\sqrt{3} \quad \text{Si risolva il sistema:} \quad \begin{cases} y=3x-\frac{\pi}{7} \\ \tan(y)=\sqrt{3} \end{cases}$$

che in [-π /2,π/2] fornisce le soluzioni: y = π/3, da cui:

$$x=\frac{10}{63}\pi\pm\frac{1}{3}k\pi$$

con la rappresentazione grafica fornita dalla:



4) sin(f(x)) = sin(g(x))

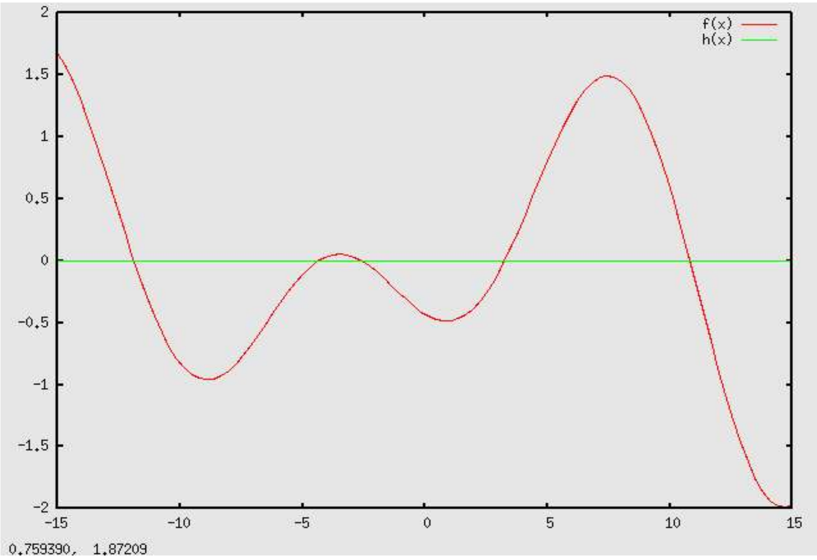
Esempio:

$\sin(\frac{x}{3})=\sin(\frac{\pi}{7}+\frac{x}{2})$ Si risolvano le due equazioni:
$$\frac{x}{3}=\frac{\pi}{7}+\frac{x}{2}\pm 2k\pi$$
$$\frac{x}{3}=\pi-\frac{\pi}{7}-\frac{x}{2}\pm 2k\pi$$

da cui:

$$x_1=-\frac{6}{7}\pi\pm 12k\pi \qquad e \qquad x_2=\frac{36}{35}\pi\pm\frac{12}{5}k\pi$$

con la rappresentazione grafica fornita dalla:



5) cos(f(x)) = cos(g(x))

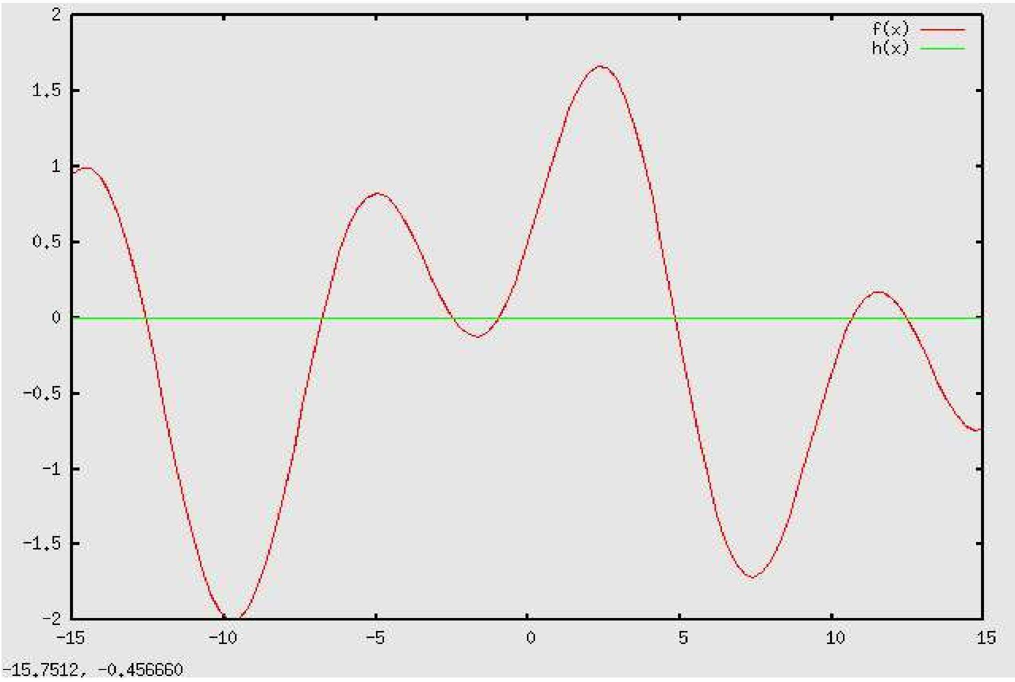
Esempio:

$\cos(\frac{x}{3})=\cos(\frac{3}{4}x+\frac{\pi}{3})$ Si risolvano le due equazioni:
$$\frac{x}{3}=\frac{3}{4}x+\frac{\pi}{3}\pm 2k\pi$$
$$\frac{x}{3}=-\frac{3}{4}x-\frac{\pi}{3}\pm 2k\pi$$

da cui:

$$x_1=-\frac{4}{5}\pi\pm\frac{24}{5}k\pi \qquad e \qquad x_2=-\frac{4}{13}\pi\pm\frac{24}{13}k\pi$$

con la rappresentazione grafica fornita dalla:



<u>6) tan(f(x)) = tan(g(x))</u>

Esempio:

$\tan(\frac{\pi}{6}-x)=\tan(x-\frac{\pi}{4})$ Si risolva l'equazione: $\frac{\pi}{6}-x=x-\frac{\pi}{4}\pm k\pi$

da cui:

$$x=\frac{5}{24}\pi\pm k\pi$$

<u>7) sin(f(x)) = cos(f(x))</u>

Esempio:

$\sin(3x)=\cos(3x)$ Si dividano ambo i membri per cos(3x) e si risolva il sistema:

$$y=3x$$
$$\tan(y)=1$$
$$\cos(y)\neq 0$$

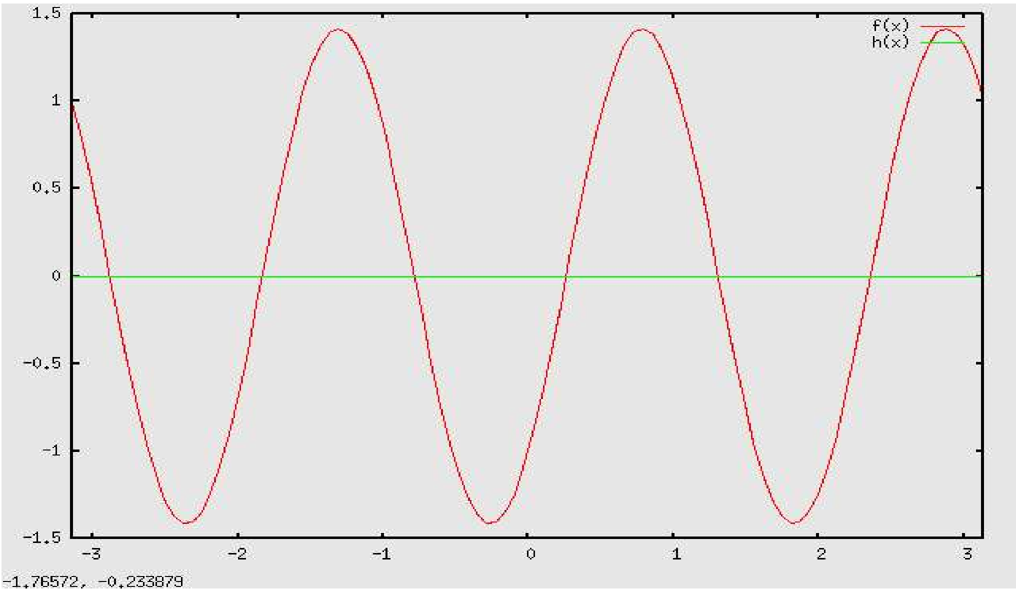
che ha per soluzioni:

$$y=\frac{\pi}{4}\pm k\,\pi \qquad da \quad cui: \quad x=\frac{\pi}{12}\pm\frac{k}{3}\,\pi$$

$$escludendo \quad i \quad valori:$$

$$x=\frac{\pi}{6}\pm\frac{2}{3}k\,\pi \qquad e \qquad x=\frac{\pi}{2}\pm\frac{2}{3}k\,\pi$$

con la rappresentazione grafica fornita dalla:



<u>8) a sin(f(x)) = b cos(f(x))</u>

Esempio:

$\sqrt{3}\sin(2\,x)=-3\cos(2\,x)$ Si dividano ambo i membri per cos(2x) e si risolva il sistema:

$$y=2\,x$$

$$\tan(y)=-\frac{3}{\sqrt{3}}=-\sqrt{3}$$

$$\cos(y)\neq 0$$

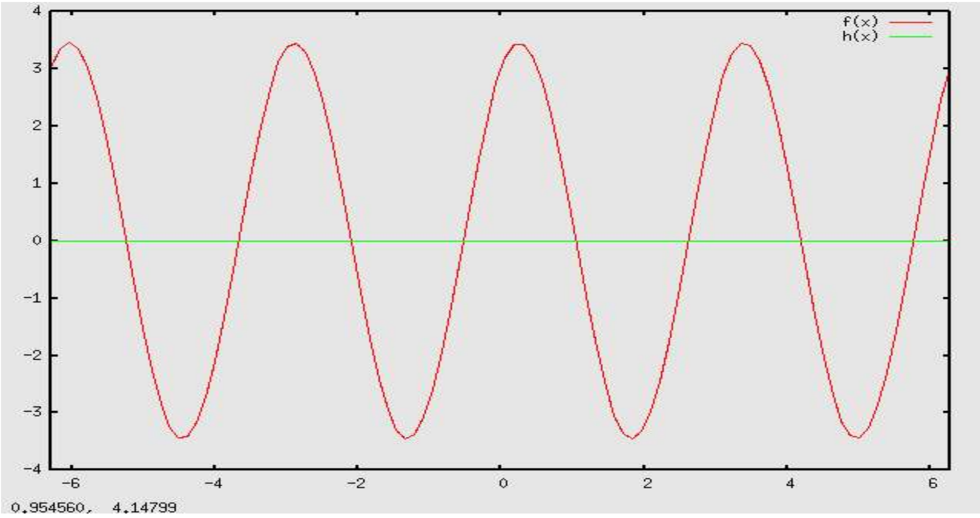
che ha per soluzioni:

$$y=-\frac{\pi}{3}\pm k\,\pi \qquad da \quad cui: \quad x=-\frac{\pi}{6}\pm\frac{k}{2}\,\pi$$

$$escludendo \quad i \quad valori:$$

$$x=\frac{\pi}{4}\pm k\,\pi \qquad e \qquad x=\frac{3}{4}\pi\pm k\,\pi$$

con la rappresentazione grafica fornita dalla:



9) a sin(f(x)) + b cos(f(x)) + c = 0

Esempio:

$\sqrt{3}\sin(4x)+\cos(4x)-2=0$ Esprimere sin(4x) e cos(4x) in funzione di tan(2x), con le:

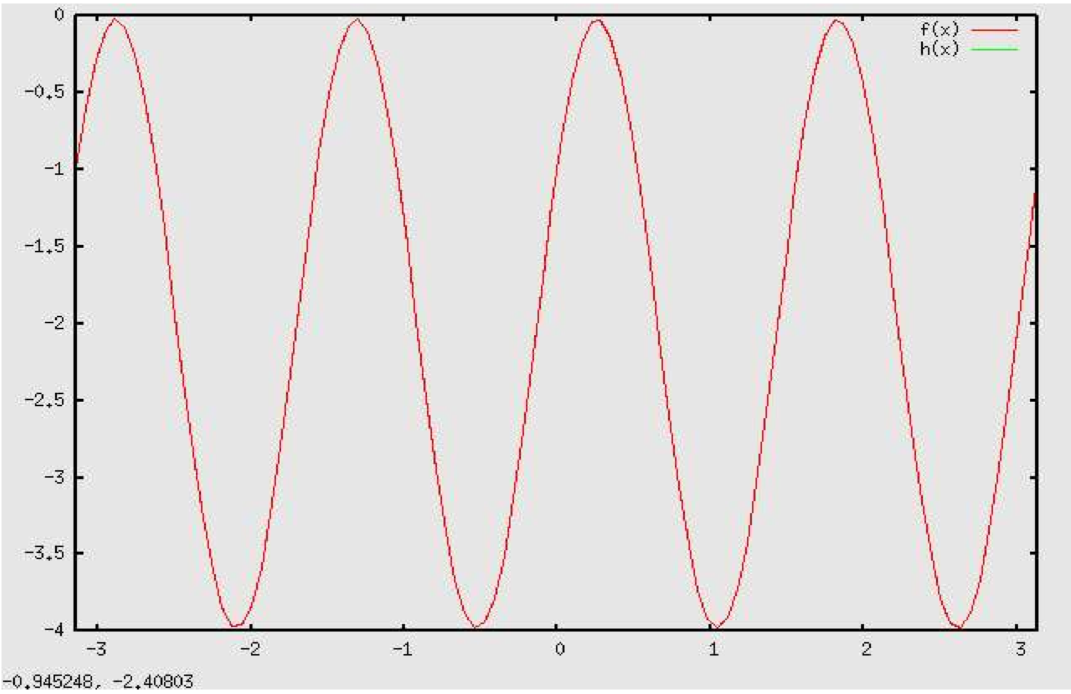
$$\sin(4x)=\frac{(2\ \tan(2x))}{(1+\tan^2(2x))} \qquad \cos(4x)=\frac{(1-\tan^2(2x))}{(1+\tan^2(2x))}$$

sostituire nell'equazione assegnata per ottenere quella equivalente in funzione di tan(2x), e risolvere il sistema:

$$\begin{aligned} &y = \tan(2x) \\ &-3\, y^2 + 2\sqrt{3}\ \ y\ \ -1 = 0 \\ &x \neq \pi/4 \pm k\, \pi/2 \end{aligned}$$

che ha per soluzioni: $y=\frac{\sqrt{3}}{3}\quad da\ \ cui:\quad 2x=\frac{\pi}{6}\pm k\,\pi\quad e\ \ quindi:\ \ x=\frac{\pi}{12}\pm k\,\pi$

rappresentata graficamente dalla:



10)a $\sin^2(f(x)) + b \cos(f(x)) \sin(f(x)) + c \cos^2(f(x)) = 0$

Esempio:

$\sin^2(x)-(1+\sqrt{3})\sin(x)\cos(x)+\sqrt{3}\cos^2(x)=0$ Dividere ambo i membri per $\cos^2(x)$ e risolvere il sistema:

$y = \tan(x)$
$y^2 - (1+\sqrt{3})\, y + \sqrt{3} = 0$
$x \neq \pi/2 \pm k\pi$

che fornisce le seguenti soluzioni:

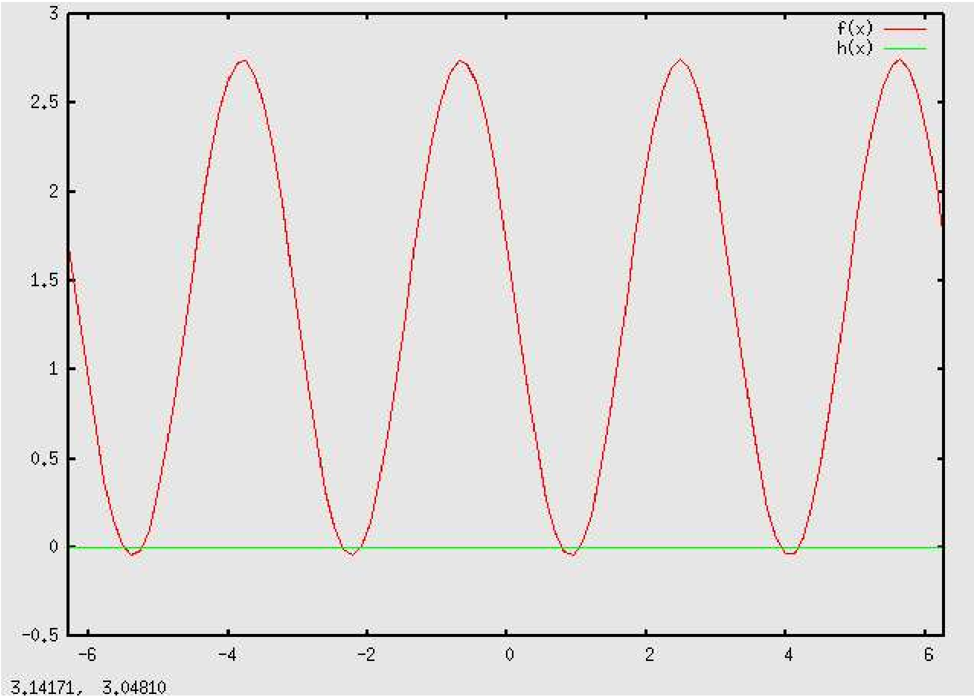
$$y_1=1 \quad e \quad y_2=\sqrt{3}$$

$$da \quad cui:$$

$$x_1=\frac{\pi}{4}\pm k\,\pi \quad e \quad x_2=\frac{\pi}{3}\pm k\,\pi$$

$$x\neq\frac{\pi}{2}\pm k\,\pi$$

rappresentata graficamente dalla:



11)a $\sin^2(f(x))$ + b $\cos(f(x)) \sin(f(x))$ + c $\cos^2(f(x))$ + d = 0

Esempio:

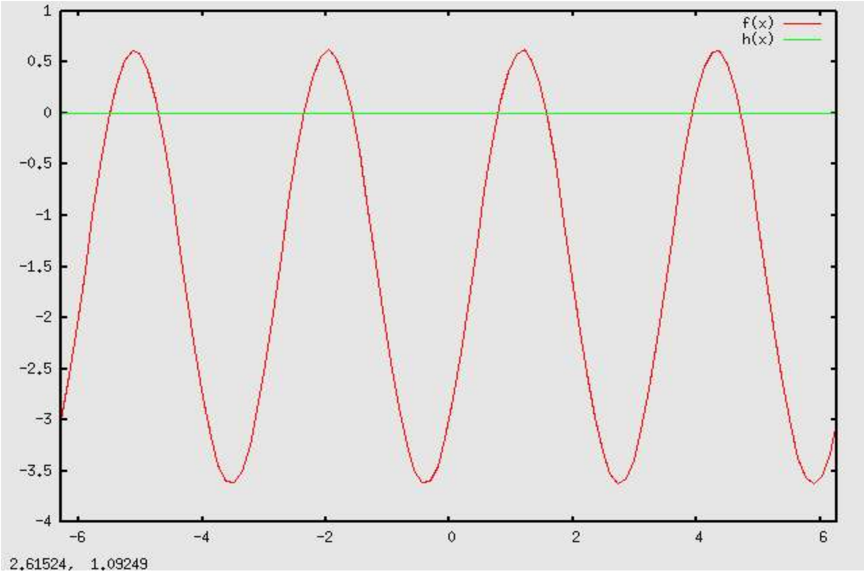
$2\sin^2(x)+3\sin(x)\cos(x)-\cos^2(x)-2=0$ Moltiplicare il termine noto per $\cos^2(x)+\sin^2(x)$ (che è uguale ad 1) e dividere poi per $\cos^2(x)$, risolvendo il sistema:

$y = \tan(x)$
$y - 1 = 0$
$x \neq \pi/2 \pm k\pi$

che ha per soluzioni:

$$y=1$$
$$da \quad cui:$$
$$x=\frac{\pi}{4}\pm k\pi$$
$$x\neq\frac{\pi}{2}\pm k\pi$$

rappresentata graficamente dalla:


f(x)
h(x)
1
0,5
0
-0,5
-1
-1,5
-2
-2,5
-3
-3,5
-4
-6
-4
-2
0
2
4
6
2,61524, 1,09249