Funzioni esponenziali e logaritmiche

Definizione:
Si definisce funzione esponenziale di base a > 0 la funzione reale y = $exp_a(x)$ che fa corrispondere ad ogni x ∈ R il numero reale positivo a^x.

Proprietà della funzione esponenziale y = a^x o y = $exp_a(x)$
La funzione è sempre positiva, ∀ *x* ∈ *R.*
Infatti, visto che a > 0:
se x > 0 la funzione è certamente positiva; se x < 0, ricordando che $a^{-x} = 1/a^x$, e quindi la funzione è ancora positiva perchè tale è sia il numeratore che il denominatore.

Quando la base a è maggiore di 1: Se x è positivo, la funzione assume valori maggiori di 1; se x è negativo valori compresi tra 0 ed 1.
Quando la base a è minore di 1: Se x è positivo, la funzione assume valori compresi tra 0 ed 1; se x è negativo valori maggiori di 1.

La funzione è sempre crescente se la base a è maggiore di 1.
La funzione è sempre decrescente se la base è minore di 1.

$$\text{La funzione } a^x \text{ è crescente se: } \frac{(a^{(x_2)}-a^{(x_1)})}{(x_2-x_1)}>0 \text{ e quindi quando:}$$

$$(a^{(x_2)}-a^{(x_1)})(x_2-x_1)>0$$

$$\text{notando che: } a^{(x_2)}=a^{(x_1+x_2-x_1)}=a^{(x_1)}a^{(x_2-x_1)} \text{ si ha:}$$

$$(a^{(x_2)}-a^{(x_1)})(x_2-x_1)=a^{(x_1)}\ (a^{(x_2-x_1)}-1)(x_2-x_1) \text{ e quindi:}$$

$$\text{quando } a>1$$

$$\text{se } (x_2-x_1)>0 \text{ il prodotto è positivo perchè } a^{(x_1)}>0 \text{ e } a^{(x_2-x_1)}>1$$

$$\text{se } (x_2-x_1)<0 \text{ il prodotto è positivo perchè } a^{(x_1)}>0 \text{ e } a^{(x_2-x_1)}<1$$

$$\text{cioè la funzione è sempre crescente,}$$

$$\text{mentre quando } a<1:$$

$$\text{se } (x_2-x_1)>0 \text{ il prodotto è negativo perchè } a^{(x_1)}>0 \text{ e } a^{(x_2-x_1)}<1$$

$$\text{se } (x_2-x_1)<0 \text{ il prodotto è negativo perchè } a^{(x_1)}>0 \text{ e } a^{(x_2-x_1)}>1$$

$$\text{cioè la funzione è sempre decrescente}$$

Analogamente nel caso che (x_2 -x_1) sia negativo, cioè che x_2 preceda x_1.

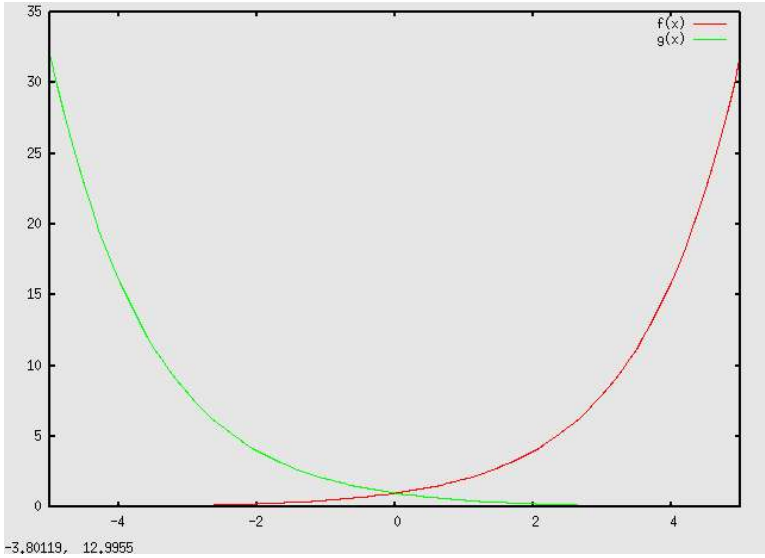
L'asse delle ascisse è asintoto orizzontale per la funzione sia nel caso che la base *a* sia maggiore di 1 (x → -∞) che in quello di una base *a* positiva e minore di 1 (x → +∞).

$L'exp_a(0) = 1$, qualunque sia la base positiva a.

A parità di variazione di x, *la velocità di variazione della funzione* è tanto più grande quanto maggiore è il valore della base *a* (con a > 1) e tanto più piccola quanto minore è il valore di *a* (con a < 1).

Le funzioni esponenziali di *basi una inversa dell'altra* sono simmetriche rispetto all'asse delle ordinate, cioè assumono lo stesso valore per valori opposti di x.

Nelle applicazioni che coinvolgono funzioni esponenziali è sempre opportuno far riferimento mnemonico alla rappresentazione grafica dei due tipi (per a >1 o per a < 1):



Tutte le funzioni esponenziali, qualunque sia la base a > 0, *intersecano l'asse delle ordinate in* 1.

Le funzioni esponenziali sono state utilizzate anche per il calcolo (su di esse è basato il regolo calcolatore usato nei calcoli scientifici e tecnici prima dell'avvento delle calcolatrici e dei computer).

Per illustrare il metodo, facciamo un semplice esempio per le moltiplicazioni (ma quanto detto, con le necessarie differenze, vale anche per le divisioni, le potenze e i radicali), basata quindi sulla proprietà: $a^m a^n = a^{m+n}$, che evidenzia come il **prodotto** di due potenze (con la stessa base) sia uguale alla potenza (nella stessa base) che ha per esponente la **somma** dei due esponenti.
Ad esempio, utilizzando il grafico dell'esponenziale in base 2 (ma avremmo potuto usare una base differente) per eseguire il semplice prodotto di 4*16, troviamo i valori di x corrispondenti agli esponenziali 4 e 16 (che sono rispettivamente 2 e 4, perchè $2^2 = 4$ e $2^4 = 16$), sommiamo questi due valori, ottenendo 6 e cerchiamo poi sullo stesso grafico il valore dell'esponenziale di 6 che risulta essere 64.
L'esempio è stato presentato per facilitare la comprensione del metodo.

Le utilizzazioni nel calcolo numerico saranno chiarite nel paragrafo successivo con la trattazione dei logaritmi.

Fra le infinite possibili basi per gli esponenziali, due fra esse assumano particolare importanza: la base 10 e quella nel numero irrazionale 'e' (2,718281828459045...).
L'importanza della base 10 è ovviamente legata al fatto che nei calcoli utilizziamo il sistema decimale; quella del numero di Nepero 'e' è invece dovuta al fatto che molte leggi scientifiche lo utilizzano per descrivere i fenomeni naturali.
Dalla definizione della funzione esponenziale si deduce facilmente che $\exp_{10}(n)$, con n naturale, è dato dalla cifra 1 seguita da un numero di zeri pari all'esponente n.
Quindi se $\exp_{10}(3) < x < \exp_{10}(4)$ il numero x sarà certamente compreso tra 1.000 e 10.000.

Come si può dimostrare, *la funzione esponenziale*, con base maggiore di 1, almeno da un certo valore di x in poi, *assume valori maggiori di quelli di una qualsiasi funzione polinomiale*, qualunque ne sia il grado: pertanto le funzioni esponenziali possono rappresentare tutti i fenomeni con uno sviluppo 'esplosivo' come, ad esempio, il numero di neutroni prodotto in una reazione a catena o quello dello sviluppo di una popolazione non soggetta ad alcuna limitazione naturale.

Dalla tabella che segue, in cui sono riportati due parziali sviluppi per l'esponenziale in base 2 e 3, si può osservare facilmente che il *rapporto tra l'incremento della funzione (a^{x+1}-a^x) e quello della funzione (a^x),* riportato nella quarta e nella ottava colonna della tabella, *rimane in ogni caso costante*; ciò significa che numeratore e denominatore sono funzioni esponenziali e quindi possiamo dedurre che *in una funzione esponenziale l'incremento della funzione è anch'esso una funzione esponenziale con lo stesso andamento di quella* (come evidenziato dalle ultime colonne della tabella).

Val. iniziale: 0,1

	Base = 2					**Base = 3**			
X	2^x	2^x-2^{x-1}	$(2^x-2^{x-1})/2^x$	$(2^x-2^{x-1})/(a-1)$		3^x	3^x-3^{x-1}	$(3^x-3^{x-1})/3^x$	$(3^x-3^{x-1})/(a-1)$
0,1	**1,0718**					**1,1161**			
1,1	**2,1435**	1,0718	1	**1,0718**		**3,3484**	2,23	2	**1,1161**
2,1	**4,2871**	2,1435	1	**2,1435**		**10,0451**	6,7	2	**3,3484**
3,1	**8,5742**	4,2871	1	**4,2871**		**30,1353**	20,09	2	**10,0451**
4,1	**17,1484**	8,5742	1	**8,5742**		**90,4060**	60,27	2	**30,1353**
5,1	**34,2968**	17,1484	1	**17,1484**		**271,2179**	180,81	2	**90,4060**
6,1	**68,5935**	34,2968	1	**34,2968**		**813,6538**	542,44	2	**271,2179**
7,1	**137,1870**	68,5935	1	**68,5935**		**2440,9614**	1627,31	2	**813,6538**
8,1	**274,3740**	137,1870	1	**137,1870**		**7322,8841**	4881,92	2	**2440,9614**
9,1	**548,7480**	274,3740	1	**274,3740**		.....	.....	.....	.....
10,1	**1097,4960**	548,7480	1	**548,7480**					
11,1	**2194,9921**	1097,4960	1	**1097,4960**					
12,1	**4389,9841**	2194,9921	1	**2194,9921**					
13,1	**8779,9682**	4389,9841	1	**4389,9841**					
	.....	.....	.....	.....					

La funzione logaritmica

La funzione esponenziale $y = a^x$ *è invertibile*, cioè esiste la sua funzione inversa (che chiameremo funzione logaritmica o semplicemente logaritmo):

$$\forall y \in R_0^+ \ e \ \forall y \in R_0^+ - [1] \ \exists \ un\,unico \ \ x \in R \ : \ x = \log_a(y)$$

Definizione:
Si chiama logaritmo di un numero k ∈ R_0^+ (reale positivo) in una prefissata base a ∈ R_0^+-{1} (reale positiva e diversa da 1), l'esponente x al quale si deve elevare la base a per ottenere il numero k.
In altre parole il logaritmo di un numero k ∈ R_0^+ si presenta come soluzione x dell'equazione esponenziale $k = a^x$.

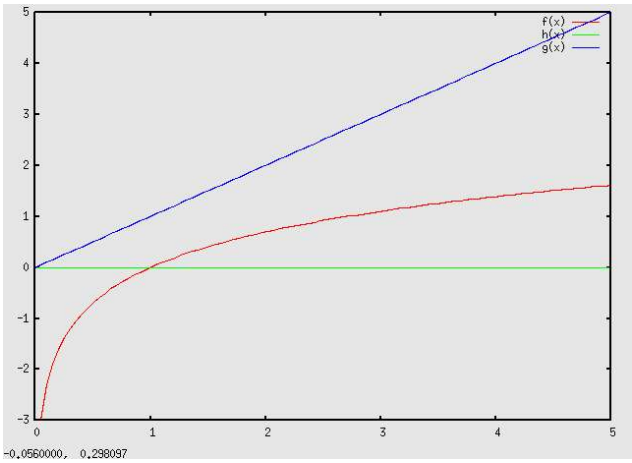
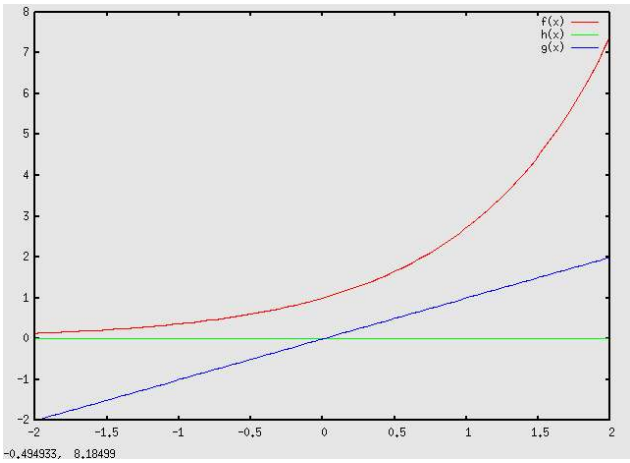
Proprietà della funzione logaritmica $y = \log_a(x)$
Come conseguenza immediata della definizione, sussiste l'uguaglianza:

$$(\log_a(k) = x) \Leftrightarrow (a^x = \exp_a(x), \ \ con\, k \in R_0^+ \ e \ \ a \in R_0^+ - [1])$$

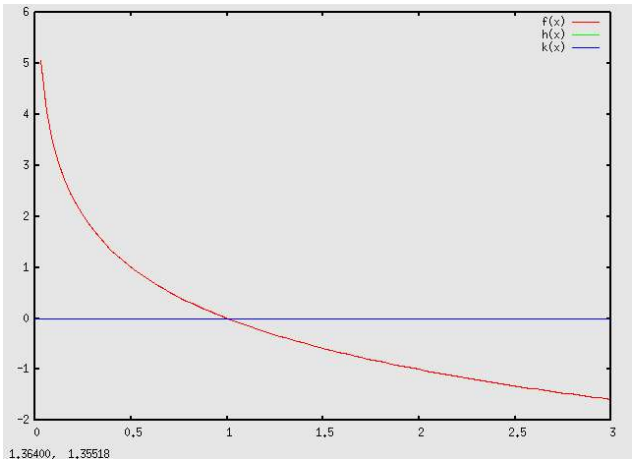
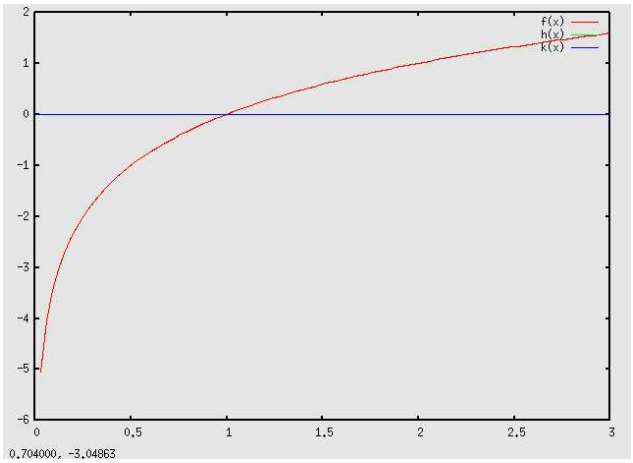
Dalla definizione di funzione inversa, si deduce immediatamente che:

$$log_a(exp_a(x)) = x \qquad \text{e che:} \qquad exp_a(log_a(x)) = x$$

Ancora, dalle proprietà delle funzioni inverse, alla coppia di coordinate (x,y) della curva esponenziale nella base a, corrisponde la coppia di coordinate (y,x) di quella logaritmica nella stessa base e quindi il grafico di $\log_a(y)$ è la curva simmetrica di quella $\exp_a(x)$ rispetto alla bisettrice del I e III quadrante:

Grafico del logaritmo	Grafico dell'esponenziale
	

Dalla rappresentazione grafica di si deduce facilmente che:

Logaritmo con base 0 < a <1	**Logaritmo con base a > 1**
	

Il $log_a(x)$ *è definito soltanto per valori positivi dell'argomento x*, essendo soluzione della corrispondente equazioni esponenziale.

<u>Nel caso che la base *a* sia positiva, ma minore di 1:</u>
Il $log_a(x)$ *è strettamente decrescente*
Il $log_a(x)$ *è negativo se* $x > 1$
Il $log_a(x)$ *è positivo se* $0 < x < 1$

<u>Nel caso che la base *a* sia maggiore di 1:</u>
Il $log_a(x)$ *è strettamente crescente*
Il $log_a(x)$ *è positivo se* $x > 1$
Il $log_a(x)$ *è negativo se* $0 < x < 1$

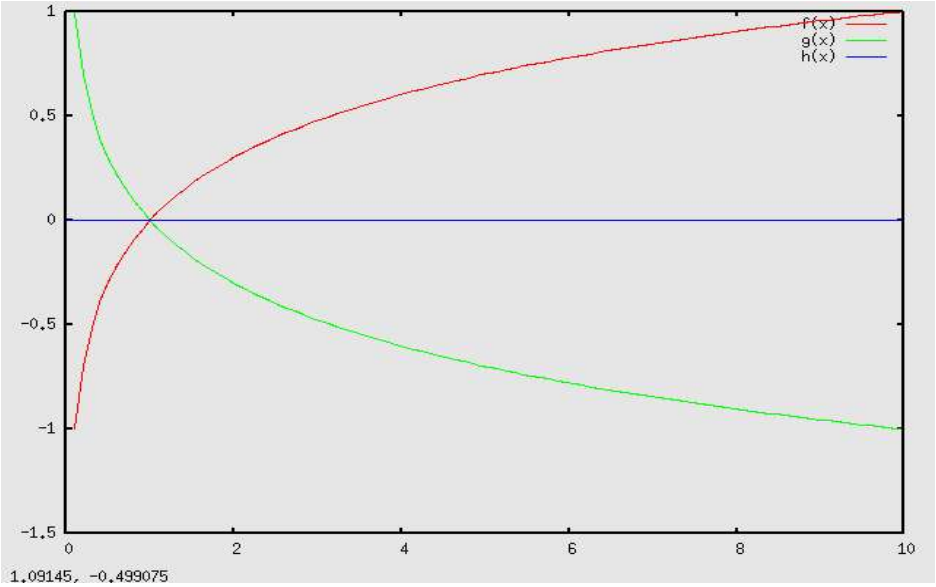
L'asse delle ordinate è asintoto verticale per $x \rightarrow 0$, qualunque sia la base positiva a.

Il $log_a(1) = 0$, qualunque sia la base positiva a.

A parità di variazione di x, la *velocità di variazione di* $y = log_a(x)$ è tanto più grande quanto maggiore è la base a, se $a > 1$ e tanto più piccola quanto minore è la base a, se $0 < a < 1$.

Funzioni logaritmiche di *basi una inversa dell'altra* sono simmetriche rispettoall'asse delle ascisse, cioè assumono lo stesso valore per valori opposti dell'argomento.

Nelle applicazioni che coinvolgono funzioni logaritmiche è sempre opportuno far riferimento mnemonico alla rappresentazione grafica dei due tipi (per $a > 1$ o per $a < 1$):



L'uso della funzione logaritmica è giustificato dalla presenza di tale funzione in molte leggi della fisica e di altre scienze, perchè tali funzioni descrivono fenomeni che si evolvono molto lentamente nel tempo (come, ad esempio, il decadimento radioattivo), ma anche da alcune importanti proprietà che, prima dell'avvento delle macchine calcolatrici e dei computer, permettevano l'esecuzione di calcoli complicati, impensabili con altre metodologie.

Riportiamo di seguito alcuni teoremi sui logaritmi che illustrano l'uso di tali funzioni per il calcolo:

Teorema del prodotto:
Il logaritmo del prodotto di due fattori positivi è uguale alla somma dei logaritmi dei singoli fattori: $\log_a(x_1 x_2) = \log_a(x_1) + \log_a(x_2)$

Teorema del quoziente:
Il logaritmo del quoziente di due fattori positivi è uguale alla differenza dei logaritmi dei singoli fattori: $\log_a(\frac{x_1}{x_2}) = \log_a(x_1) - \log_a(x_2)$

Teorema della potenza e della radice:
Il logaritmo della potenza (intera o reale) di un numero positivo è uguale al prodotto dell'esponete per il logaritmo del numero: $\log_a(x)^r = r \log_a(x)$

Le dimostrazioni sono immediate in base alla definizione della funzione:

Posto:

$\log_a(x_1 x_2)=z$ $\qquad a^z=x_1 x_2$

$\log_a(x_1)=z_1$ *sarà anche:* $\qquad a^{(z_1)}=x_1$ *e quindi:* $a^z=a^{(z_1)}a^{(z_2)}=a^{(z_1+z_2)}\rightarrow z=z_1+z_2$

$\log_a(x_2)=z_2$ $\qquad a^{(z_2)}=x_2$

Le altre dimostrazioni sono analoghe.

Una importante proprietà dei logaritmi ci permette di *passare da un logaritmo in una base ad uno espresso mediante un'altra*: supponiamo di conoscere il logaritmo di uno stesso numero x in due basi differenti e sia $x_1 = \log_a(x)$ e $x_2=\log_b(x)$, allora per definizione si verifica che:

$$a^{(x_1)}=b^{(x_2)}\rightarrow\log_a(a^{(x_1)})=\log_a(b^{(x_2)})\rightarrow x_1=x_2\log_a(b)\rightarrow\log_a(x)=\log_b(x)\log_a(b)$$

e da questa:

$$\log_b(x)=\frac{(\log_a(x))}{(\log_a(b))}$$