Equazioni esponenziali

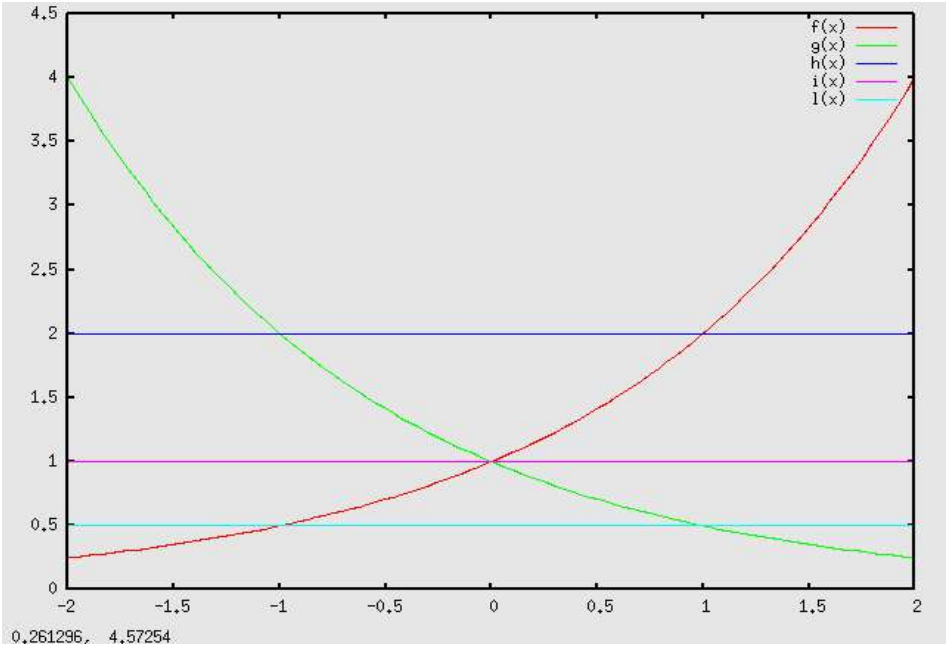
E' esponenziale un'equazione in cui l'incognita figura come esponente:

$$(I) \quad h\ a^{(f(x))} = k$$
oppure del tipo:
$$(II) \quad h\ a^{(f(x))} = k\ a^{(g(x))}$$
o infine:
$$(III) \quad h\ a^{(f(x))} = k\ b^{(g(x))}$$

ove:
$a \in R^+$
$\frac{k}{h} > 0$
$f(x) \in R$
$g(x) \in R$

ove f(x) e g(x) sono funzioni polinomiali o semplicemente la variabile x.

Dal grafico delle funzioni esponenziali con base a ∈ R^+ (reale positiva), maggiore o minore di 1:



si deduce immediatamente che **k/h** *deve essere strettamente positivo* (perchè altrimenti l'equazione non avrebbe soluzione) e che sia nel caso di basi > 1 che in quello di basi minori di 1 (ma sempre maggiori di 0), *la soluzione di un'equazione esponenziale è sempre unica*.

Tutte le equazioni esponenziali, anche nel caso più complesso, sono risolubili *graficamente* trovando l'intersezione delle due curve:

$$y = h\ a^{(f(x))} \quad con \quad a \in R^+ - [1], f(x) \in R$$
$$z = k\ b^{(g(x))} \quad con \quad b \in R^+ - [1], g(x) \in R$$

In generale le equazioni esponenziali si risolvono applicando ad ambo i membri la sua funzione inversa (il logaritmo), in quanto $\log_a(a^{(f(x))}) = f(x)$

Così, ad esempio:

$$5^x = 1/25 = 5^{-2} \text{ ---> } \log_5(5^x) = \log_5(5^{-2}) \text{ --> } x = -2$$

Ovviamente lo stesso metodo è applicabile quando le due potenze abbiano la stessa base come nell'esempio che segue (equazioni binomie con la stessa base):

$$5^{(3x^2-1)} = 5^{(\frac{x}{(x+1)})} \quad \rightarrow \quad \log_5(5^{(3x^2-1)}) = \log_5(5^{(\frac{x}{(x+1)})}) \quad \rightarrow \quad 3x^2 - 1 = \frac{x}{(x+1)}$$

Quindi in generale:

$$(I) \qquad h\,a^{(f(x))} = k \quad \rightarrow \quad a^{(f(x))} = \frac{k}{h} \quad \rightarrow \quad \log_a(a^{(f(x))}) = \log_a(\frac{k}{h}) \quad \rightarrow$$

$$f(x) = \log_a(\frac{k}{h})$$

$$(II) \qquad h \;\; a^{(f(x))} = k \;\; a^{(g(x))} \quad \rightarrow \quad a^{(f(x))} = \frac{k}{h} a^{(g(x))} \quad \rightarrow$$

$$\log_a(a^{(f(x))}) = \log_a(\frac{k}{h} a^{(g(x))}) = \log_a(\frac{k}{h}) + \log_a(a^{(g(x))}) \quad \rightarrow$$

$$f(x) = \log_a(\frac{k}{h}) + g(x)$$

e si complica parzialmente quando le basi non siano uguali (equazioni binomie con base diversa) perchè in tal caso bisogna calcolare il fattore per passare da una base all'altra secondo la:

$$\log_b(x) = \frac{(\log_a(x))}{(\log_a(b))}$$

come nell'esempio successivo:

$$5^{(3x^2-1)} = 10^{(\frac{x}{(x+1)})} \quad \rightarrow \quad \log_5(5^{(3x^2-1)}) = \log_5(10^{(\frac{x}{(x+1)})}) = \frac{(\log_{10}(10^{(\frac{x}{(x+1)})}))}{(\log_{10}(5))}$$

da cui :

$$3x^2 - 1 \;\; = \;\; \frac{1}{(\log_{10}(5))} \;\; \frac{x}{(x+1)}$$

o, in generale:

$$(III) \qquad h\ \ a^{(f(x))} = k\ \ b^{(g(x))} \quad \rightarrow \quad a^{(f(x))} = \frac{k}{h} b^{(g(x))} \quad \rightarrow$$

$$\log_a\ (a^{(f(x))}) = \log_a\ (\frac{k}{h}\ (b^{(g(x))})) = \log_a(\frac{k}{h}) + \log_a(b^{(g(x))}) \quad \rightarrow$$

$$f(x) = \log_a(\frac{k}{h}) + \frac{1}{(\log_b(a))}\, g(x)$$

Nel caso, infine, che le equazioni esponenziali ($P(a^{f(x)}) = 0$) siano risolubili con una posizione del tipo $z = a^{f(x)}$, si dovrà risolvere un sistema costituito dalle due equazioni:

$$z = a^{f(x)}$$
$$P(z) = 0$$

Ad esempio, per l'equazione: $m(a^{(f(x))})^2 + n(a^{(f(x))}) + p = 0$
basterà risolvere il sistema:

$$z = a^{f(x)}$$
$$m\ z^2 + n\ z + p = 0$$

sostituendo i valori di z ricavati dalla seconda equazione nella prima.

Equazioni logaritmiche

E' logaritmica un'equazione in cui l'incognita figura come argomento di un logaritmo:

$$(I) \quad h\ \ \log_a(f(x)) \ = \ k$$

oppure del tipo:

$$(II) \quad h\ \ \log_a(f(x)) \ = \ k\ \ \log_a(g(x))$$

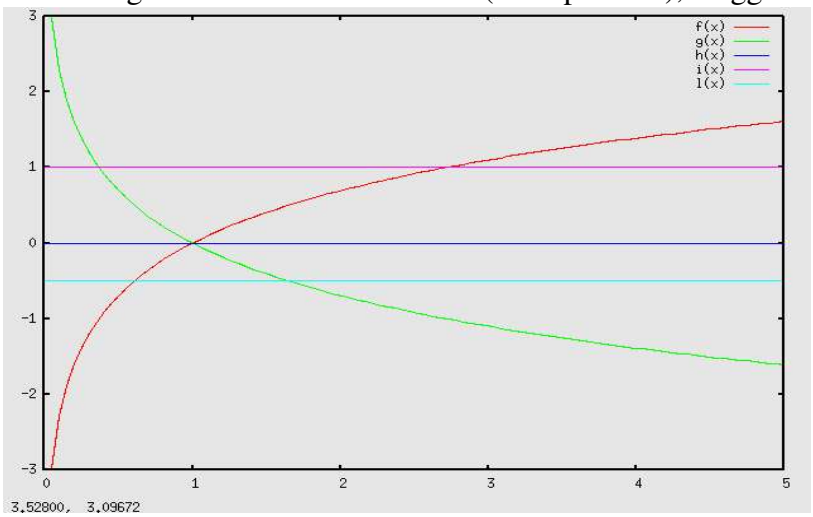
o infine:

$$(III) \quad h\ \ \log_a(f(x)) \ = \ k\ \ \log_b(g(x))$$

ove:

$$a \in R_0^+ - [1]$$
$$\frac{k}{h} \in R$$
$$f(x) \in R_0^+$$
$$g(x) \in R_0^+$$

ove f(x) e g(x) sono funzioni polinomiali o semplicemente la variabile x.
Dal grafico delle funzioni logaritmiche con base a ∈ R^+ (reale positiva), maggiore o minore di 1:



si deduce immediatamente che **k/h** è un numero reale qualsiasi e che sia nel caso di basi > 1 che in quello di basi minori di 1 (ma sempre maggiori di 0), *la soluzione di un'equazione logaritmica è sempre unica*.

Tutte le equazioni logaritmiche, anche nel caso più complesso, sono risolubili *graficamente* trovando l'intersezione delle due curve:

$$y = h \log_a(f(x)) \quad con \quad a \in R^+ , f(x) > 0$$
$$z = k \log_b(g(x)) \quad con \quad b \in R^+ , g(x) > 0$$

In generale le equazioni logaritmiche si risolvono applicando ad ambo i membri la sua funzione inversa (l'esponenziale), in quanto $a^{(\log_a(f(x)))} = f(x)$

Analogamente al caso delle equazioni esponenziali, anche per quelle logaritmiche, valgono le regole generali:

$$(I) \qquad h \log_a(f(x)) = k \quad \rightarrow \quad \log_a(f(x)) = \frac{k}{h} \quad \rightarrow \quad a^{(\log_a(f(x)))} = a^{(\frac{k}{h})} \quad \rightarrow$$
$$f(x) = a^{(\frac{k}{h})}$$

$$(II) \qquad h \log_a(f(x)) = k \log_a(g(x)) \quad \rightarrow \quad \log_a(f(x)) = \frac{k}{h} \log_a(g(x)) \quad \rightarrow$$
$$a^{(\log_a(f(x)))} = a^{(\frac{k}{h} \log_a(g(x)))} = a^{(\log_a(g(x))^{(\frac{k}{h})})} \quad \rightarrow$$
$$f(x) = (g(x))^{(\frac{k}{h})}$$

$$(III) \qquad h \log_a(f(x)) = k \log_b(g(x)) \quad \rightarrow \quad \log_a(f(x)) = \frac{k}{h} \log_b(g(x)) \quad \rightarrow$$
$$a^{(\log_a(f(x)))} = a^{(\frac{k}{h} \log_b(g(x)))} = a^{(\log_b(g(x))^{(\frac{k}{h})})} = a^{((\frac{(\log_a(g(x)))}{(\log_b(a))})^{(\frac{k}{h})})} \quad \rightarrow$$
$$f(x) = (g(x))^{(\frac{k}{(h \log_b(a))})}$$

Nel caso, infine, che le equazioni logaritmiche ($P(\log_a(f(x)) = 0$) siano risolubili con una posizione del tipo $z = \log_a(f(x)$, si dovrà risolvere un sistema costituito dalle due equazioni:

$z = \log_a(f(x)$
$P(z) = 0$

Ad esempio, per l'equazione: $m(\log_a(f(x)))^2+n(\log_a(f(x)))+p=0$
basterà risolvere il sistema:

$z = \log_a(f(x)$

$m\ z^2+ n\ z + p = 0$

sostituendo i valori di z ricavati dalla seconda equazione nella prima.