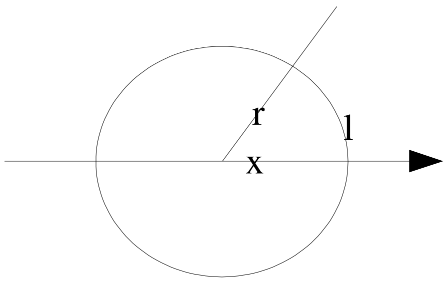
Goniometria

Misura degli angoli

Gli angoli vengono spesso misurati in gradi sessagesimali (1° = 1/360 dell'angolo giro), anche se una Legge dello Stato italiano del 1960 impone di esprimerli in radianti. Ogni grado è suddiviso in 60 parti (primi: '); a sua volta ogni primo è suddiviso in 60 parti (secondi: “), con una convenzione legata ad un sistema metrico sessagesimale (utilizzato anche per la misura del tempo), imposto dalla attuale cultura anglo-americana.
Con questo sistema numerico, i calcoli risultano laboriosi e impegnano, inutilmente, gli studenti delle classi della media inferiore.
Gli stessi calcoli sono invece immediati se si utilizza il radiante che è una grandezza decimale del nostro comune sistema numerico.

Definizione:
Il radiante è la misura (decimale) dell'angolo al centro di una qualsiasi circonferenza che sottende un arco di lunghezza uguale al raggio:



con x = 1 rad se l = r.

Questa stessa definizione viene del resto utilizzata nella determinazione della lunghezza della circonferenza, che corrisponde all'arco sotteso da un angolo al centro pari ad un angolo giro, espressa dalla nota formula $c = 2\pi\ r$, e permette inoltre di individuare il *numero irrazionale π come rapporto tra la lunghezza della circonferenza ed il suo diametro:*

$$\pi = c / 2r$$

rapporto tra una lunghezza curvilinea ed una rettilinea.
Dunque, se l'angolo è espresso in radianti, vale la relazione:

$$l = x\ r$$

ove 'l' è la lunghezza dell'arco sotteso dall'angolo x in una circonferenza di raggio r.
Poiché l'angolo giro è espresso in gradi sessagesimali da 360° ed in radianti da 2π, vale la relazione:

$$\frac{360}{(2\pi)} = \frac{x}{y} \quad \frac{gradi}{rad}$$

che ci permette di passare da un sistema di misura all'altro con le:

$$x(gradi)=\frac{360}{(2\pi)}y(rad) \quad oppure \quad y(rad)=\frac{(2\pi)}{360}x(gradi)$$

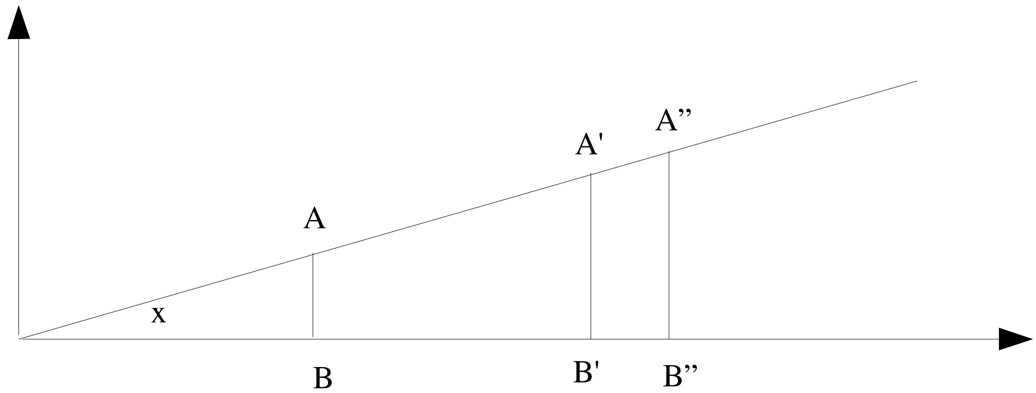
Per questioni di convenienza pratica, riportiamo di seguito le corrispondenze più comuni tra gli angoli espressi nei due sistemi:

gradi	**0**	**30**	**60**	**90**	**120**	**150**	**180**	**210**	**240**	**270**	**300**	**330**	**360**
rad	**0**	**1/6 π**	**1/3 π**	**1/2 π**	**2/3 π**	**5/6 π**	**π**	**7/6 π**	**4/3 π**	**3/2 π**	**5/3 π**	**11/6 π**	**2 π**
π/6	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**

E ricordiamo che a 45° sessagesimali corrisponde la misura di $\pi/4$ rad.

Definizione delle funzioni goniometriche fondamentali

In un sistema cartesiano orogonale Oxy, consideriamo i triangoli rettangoli tra loro simili OAB, OA'B', OA”B”,... con un angolo x in comune:



In essi il rapporto tra i lati omologhi è ovviamente costante, funzione solo dell'ampiezza dell'angolo x: è quindi possibile definire alcune funzioni, indipendenti dalle lunghezze dei cateti e dell'ipotenusa.

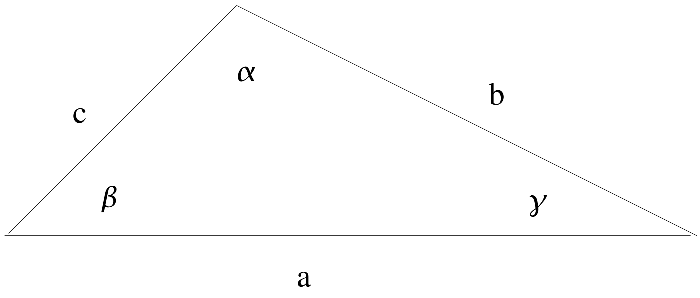
Dunque, fra le possibili, definiamo le seguenti:

$$\sin(x)=\frac{(AB)}{(OA)}=\frac{(A'B')}{(OA')}=\frac{(A''B'')}{(OA'')}=.......$$

$$\cos(x)=\frac{(OB)}{(OA)}=\frac{(OB')}{(OA')}=\frac{(O'B'')}{(OA'')}=.......$$

$$\tan(x)=\frac{(AB)}{(OB)}=\frac{(A'B')}{(OB')}=\frac{(A''B'')}{(OB'')}=.......$$

o, con diversa notazione, relativa ad un qualsiasi triangolo rettangolo in α con angoli acuti in β e in γ:



$$\sin(\beta)=\frac{b}{a} \quad \cos(\beta)=\frac{c}{a} \quad \tan(\beta)=\frac{b}{c}$$

$$\sin(\gamma)=\frac{c}{a} \quad \cos(\gamma)=\frac{b}{a} \quad \tan(\gamma)=\frac{c}{b}$$

Queste relazioni possono essere utilizzate per le seguenti definizioni:
Il **seno** di un angolo x è espresso dal *rapporto* tra il cateto opposto all'angolo x e l'ipotenusa.
Il **coseno** di un angolo x è espresso dal *rapporto* tra il cateto adiacente all'angolo x e l'ipotenusa.
La **tangente** di un angolo x è espresso dal *rapporto* tra il cateto opposto all'angolo x e quello ad esso adiacente.

Si tratta dunque sempre di un rapporto tra due grandezze omogenee (lunghezze), espresso da un *numero puro.* Pertanto, anche se, nelle definizioni, viene utilizzata normalmente la cosiddetta circonferenza goniometrica di raggio unitario (che individua l'ipotenusa del triangolo rettangolo), *è del tutto errato dire,* ad esempio, *che il seno di un angolo è dato dalla lunghezza del cateto opposto!!!*

Queste stesse definizioni saranno utilizzate per la 'risoluzione' dei triangoli rettangoli, riportata nel capitolo sulla Trigonometria.

Per comodità riportiamo di seguito i valori assunti dalle tre funzioni per alcune ampiezze di angoli compresi nell'intervallo [0,π/2]:

x	**0**	**π/6**	**π/4**	**π/3**	**π/2**
sin(x)	**0**	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	**1**
cos(x)	**1**	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	**0**
tan(x)	**0**	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	**1**	$\sqrt{3}$	**+∞**

Angoli associati

Indipendentemente dal sistema di misura utilizzato, valgono alcune definizioni che utilizzeremo in seguito e che ora qui elenchiamo:

Dato l'angolo α (misurato in senso antiorario), diremo *opposto* l'angolo $-\alpha$ con la stessa ampiezza, ma misurato in senso orario;

Diremo *esplementari* due angoli α e β tali che la loro somma sia uguale ad un angolo giro (2π), cioè con $\beta = 2\pi - \alpha$.

Diremo *supplementari* due angoli α e β tali che la loro somma sia uguale ad un angolo piatto (π), cioè con $\beta = \pi - \alpha$.

Diremo *complemetari* due angoli α e β tali che la loro somma sia uguale ad un angolo retto ($\pi/2$), cioè con $\beta = \pi/2 - \alpha$.

Diremo angoli che *differiscono di un angolo piatto* due angoli α e β tali che la loro differenza sia uguale ad un angolo piatto (π), cioè con $\beta = \pi + \alpha$.

Diremo angoli che *differiscono di un angolo retto* due angoli α e β tali che la loro differenza sia uguale ad un angolo retto ($\pi/2$), cioè con $\beta = \pi/2 + \alpha$.

Estensione delle definizioni delle funzioni goniometriche per angoli maggiori di $\pi/2$.

Le precedenti definizioni sono relative ad angoli acuti di un triangolo rettangolo, compresi quindi in senso stretto tra 0 e $\pi/2$.

Negli estremi 0 e $\pi/2$ valgono le seguenti convenzioni:

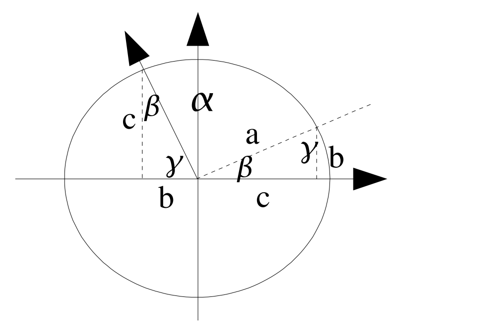
$\sin(0) = 0 \qquad \sin(\pi/2) = 1$

$\cos(0) = 1 \qquad \cos(\pi/2) = 0$

$\tan(0) = 0 \qquad \tan(\pi/2) = +\infty$

Per angoli maggiori di $\pi/2$ la stessa definizione può essere applicata considerando *i triangoli rettangoli formati con l'asse delle ascisse* in una qualsiasi circonferenza, e in particolare in quella goniometrica di raggio unitario, ed il segno dei cateti b e c, mentre quello dell'ipotenusa è da assumere sempre positivo.

Ogni angolo del II quadrante (misurato in senso antiorario) può essere pensato come somma di un angolo acuto β con $\pi/2$: $\alpha = \beta+\pi/2$

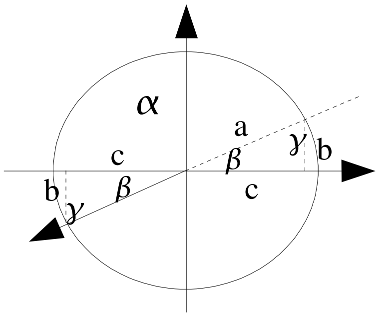


$$\sin(\alpha)=\sin(\beta+\frac{\pi}{2})=\cos(\beta)=\frac{c}{a}$$

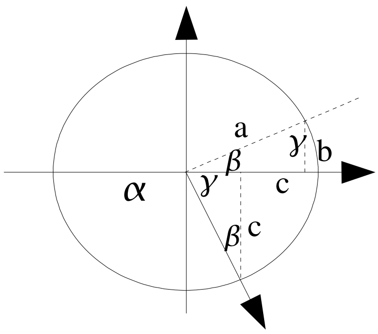
$$\cos(\alpha)=\cos(\beta+\frac{\pi}{2})=-\sin(\beta)=-\frac{b}{a}$$

$$\tan(\alpha)=-\frac{1}{(\tan(\beta))}=-\frac{c}{b}$$

Ogni angolo del III quadrante (misurato in senso antiorario) può essere pensato come somma di un angolo acuto β con π: $\alpha = \beta+\pi$

	$\sin(\alpha)=\sin(\beta+\pi)=-\sin(\beta)=-\frac{b}{a}$ $\cos(\alpha)=\cos(\beta+\pi)=-\cos(\beta)=-\frac{c}{a}$ $\tan(\alpha)=\tan(\beta)=\frac{b}{c}$

Ogni angolo del IV quadrante (misurato in senso antiorario) può essere pensato come somma di un angolo acuto β con $3/2\pi$: $\alpha = \beta+3/2\pi$

	$\sin(\alpha)=\sin(\beta+\frac{3}{2}\pi)=-\cos(\beta)=-\frac{c}{a}$ $\cos(\alpha)=\cos(\beta+\frac{3}{2}\pi)=\sin(\beta)=\frac{b}{a}$ $\tan(\alpha)=-\frac{1}{(\tan(\beta))}=-\frac{c}{b}$

Queste equivalenze vengono normalmente indicate come *riduzioni al I quadrante* e si dimostrano facilmente considerando i triangoli rettangoli uguali nel I e II quadrante, oppure nel I e III quadrante oppure nel I e IV quadrante, rispettivamente.

Per non avere dubbi sui segni e sulle funzioni, si può utilizzare la seguente regola generale:

> *Il **seno** di un angolo α maggiore di π/2, è uguale, a meno del segno, al **seno** dell'angolo associato mediante un <u>numero pari di multipli di π/2</u> o al **coseno** dell'angolo associato mediante un <u>numero dispari di multipli di π/2</u>; il segno della funzione è quello di sin(α).*

Ad esempio:

$$\sin(\frac{7}{6}\pi)=\sin(\pi+\frac{\pi}{6})=\sin(2\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{6})=-\sin(\frac{\pi}{6})$$

oppure:

$$\sin(\frac{7}{6}\pi)=\sin(3\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{3})=-\cos(\frac{\pi}{3})$$

> *Il **coseno** di un angolo α maggiore di π/2, è uguale, a meno del segno, al **coseno** dell'angolo associato mediante un <u>numero pari di multipli di π/2</u> o al **seno** dell'angolo associato mediante un <u>numero dispari di multipli di π/2</u>; il segno della funzione è quello di cos(α).*

Ad esempio:

$$\cos(\frac{11}{6}\pi)=\cos(\frac{3}{2}\pi+\frac{\pi}{3})=\sin(\frac{\pi}{3})$$

$$oppure:$$

$$\sin(\frac{11}{6}\pi)=\sin(4\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{6})=\cos(\frac{\pi}{6})$$

La **tangente** *di un angolo α maggiore di π/2, è uguale, a meno del segno, alla* **tangente** *dell'angolo associato mediante un numero pari di multipli di π/2 o all'***inverso della tangente** *dell'angolo associato mediante un numero dispari di multipli di π/2; il segno della funzione è quello di tan(α).*

Infatti:

$$\tan(\beta+\frac{\pi}{2})=\frac{(\sin(\beta+\frac{\pi}{2}))}{(\cos(\beta+\frac{\pi}{2}))}=\frac{(\cos(\beta))}{(-\sin(\beta))}=-\frac{1}{(\tan(\beta))}$$

$$\tan(\beta+\pi)=\frac{(\sin(\beta+\pi))}{(\cos(\beta+\pi))}=\frac{(-\sin(\beta))}{(-\cos(\beta))}=\tan(\beta)$$

$$\tan(\beta+\frac{3}{2}\pi)=\frac{(\sin(\beta+\frac{3}{2}\pi))}{(\cos(\beta+\frac{3}{2}\pi))}=\frac{(-\cos(\beta))}{(\sin(\beta))}=-\frac{1}{(\tan(\beta))}$$

Proprietà delle funzioni goniometriche

Dalla definizione delle funzioni goniometriche si ricava facilmente che le funzioni sin(x) e cos(x) assumono sempre valori compresi nell'intervallo [-1,1], mentre la funzione tan(x) può assumere tutti i valori reali compresi tra]-∞ , + ∞[;

per $\pi/2 < x < \pi$:

$\sin(x) > 0$	$\cos(x) < 0$	$\tan(x) < 0$
$\sin(\pi) = 0$	$\cos(\pi) = -1$	$\tan(\pi) = 0$

per $\pi < x < 3/2\,\pi$:

$\sin(x) < 0$	$\cos(x) < 0$	$\tan(x) > 0$
$\sin(3/2\,\pi) = -1$	$\cos(3/2\,\pi) = 0$	$\tan(3/2\,\pi) = +\infty$

per $3/2\,\pi < x < 2\,\pi$:

$\sin(x) < 0$	$\cos(x) > 0$	$\tan(x) < 0$

$\sin(2\pi) = 0$	$\cos(2\pi) = 1$	$\tan(2\pi) = 0$

Ricordando poi la definizione di funzione crescente:

$$f(x) \;\; è \;\; crescente \Leftrightarrow \frac{(f(x_2) - f(x_1))}{(x_2 - x_1)} \; > \; 0$$

e quella di funzione decrescente:

$$f(x) \;\; è \;\; decrescente \Leftrightarrow \frac{(f(x_2) - f(x_1))}{(x_2 - x_1)} \; < \; 0$$

o semplicemente osservando le figure, si può ricavare che:

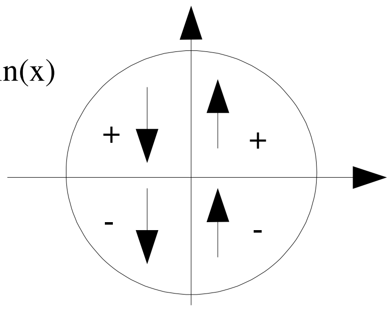
la funzione **sin(x)** è crescente nel I e IV quadrante, decrescente nel II e III quadrante;

la funzione **cos(x)** è decrescente nel I e II quadrante, crescente nel III e IV quadrante;

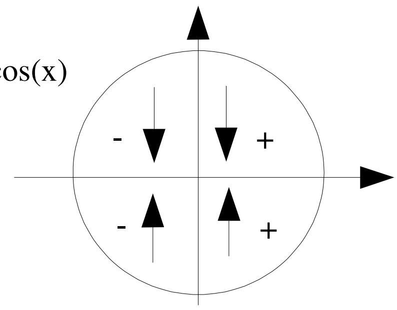
la funzione **tan(x)** è crescente nel I e III quadrante, decrescente nel II e IV quadrante.

Questi andamenti possono essere rappresentati sinteticamente dalle seguenti figure, che individuano il segno (positivo o negativo, con i simboli **+** e **-**) e la crescenza o decrescenza (con le frecce **↑** e **↓**) nei singoli quadranti:

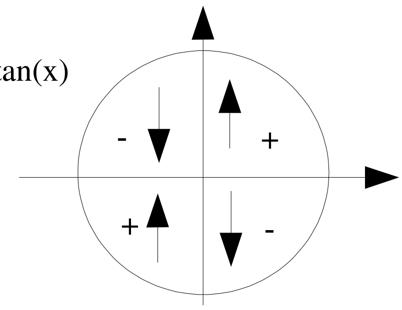
sin(x)



cos(x)

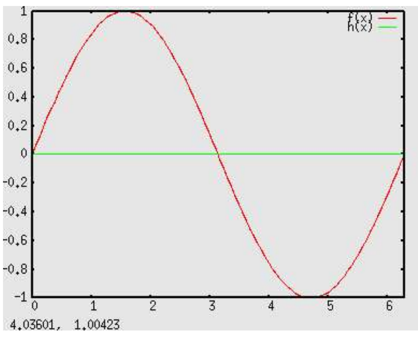


tan(x)

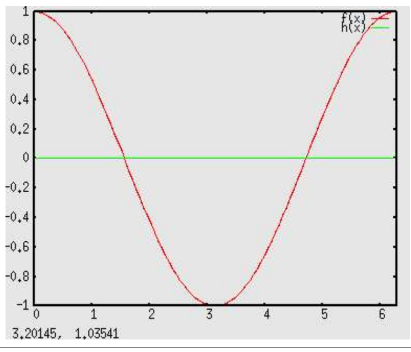


Ad ulteriore chiarimento dell'andamento delle tre funzioni nell'intervallo [0, 2 π] forniamo la loro rappresentazione grafica:

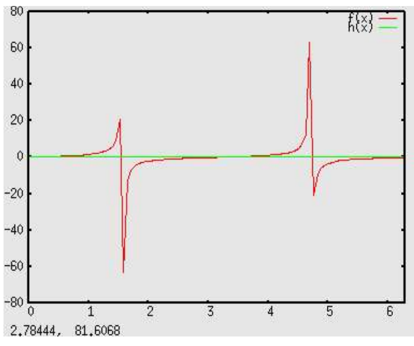
funzione sin(x) in [0,2π]



funzione cos(x) in [0,2π]



funzione tan(x) in [0,2π]



Le funzioni sin(x) e cos(x) sono periodiche di periodo T = 2 π , cioè assumono lo stesso valore in tutti gli angoli che differiscono tra loro di multipli interi di 2π o, in altri termini:

sin(x$\mp$2k π) = sin(x)   per k=0,1,2,3,.... e anche: cos(x$\mp$2k π) = cos(x)   per k=0,1,2,3,....

mentre la funzione tangente è periodica di periodo T = π, cioè:

tan(x$\mp$k π) = tan(x)   per k=0,1,2,3,....

Relazioni fondamentali tra le funzioni goniometriche

Come si ricava facilmente dalle definizioni delle funzioni goniometriche fondamentali, se β e γ sono gli angoli acuti di un qualsiasi triangolo rettangolo, con cateti b e c rispettivamente ad essi opposti, si ha che:

$$\sin(\beta)=\cos(\gamma) \quad \cos(\beta)=\sin(\gamma) \quad \tan(\beta)=\frac{(\sin(\beta))}{(\cos(\beta))} \quad \tan(\gamma)=\frac{(\sin(\gamma))}{(\cos(\gamma))}$$

e inoltre:

$$\sin^2(\beta)+\cos^2(\beta)=\frac{b^2}{a^2}+\frac{c^2}{a^2}=\frac{(b^2+c^2)}{a^2}=1$$

$$\sin^2(\gamma)+\cos^2(\gamma)=\frac{c^2}{a^2}+\frac{b^2}{a^2}=\frac{(c^2+b^2)}{a^2}=1$$

come conseguenza del teorema di Pitagora, visto che il quadrato costruito sull'ipotenusa (a^2) è equivalente alla somma dei quadrati costruiti sui cateti (b^2+c^2).