Leggere e trasformare un'espressione algebrica.
di Giorgio Lironcurti

1) Una premessa (da una copresenza Matematica-Latino al Liceo Virgilio di Roma - anno 2001 proff. Giorgio Lironcurti e Giovanni Sega)

Le traduzioni

Ogni traduzione è un processo che parte da un testo per arrivare ad un altro.
In base al modo in cui si presentano i due testi si distinguono diversi tipi di traduzione, a seconda che il segno linguistico si traduca in altri segni della stessa lingua, in un'altra lingua o in un sistema di segni non linguistici. Queste tre forme di traduzione debbono essere designate in maniera diversa:
a) la traduzione *endolinguistica* o *riformulazione* consiste nell'interpretare dei segni linguistici per mezzo di altri segni della stessa lingua;
b) la traduzione *interlinguistica* o *traduzione propriamente detta*, consiste nell'interpretazione dei segni linguistici per mezzo di un'altra lingua;
c) la traduzione *intersemiotica* o *trasmutazione* consiste nell'interpretazione dei segni linguistici per mezzo di segni non linguistici.

La traduzione *endolinguistica*
Se A e B sono scritti nella stessa lingua, la traduzione endolinguistica può assumere le forme del rifacimento (attraverso modificazioni di stile, di destinatario, di genere letterario, ecc.), della parafrasi e del riassunto. Ogni riformulazione del già detto o scritto è una traduzione, in quanto il senso viene trasferito da un'altra parte e in questo percorso perde, acquista, si modifica, diventa in parte un'altra cosa.

La traduzione *interlinguistica*
Se A e B sono scritti in lingue diverse, i problemi aumentano perchè il processo contiene un salto tanto più difficile quanto più le due lingue sono diverse tra loro. Le lingue possono non coincidere nel lessico, nelle strutture morfologiche, nell'organizzazione sintattica dei periodi, negli universi figurati che producono.

La traduzione *intersemiotica*
A e B possono appartenere anche a codici diversi, se, ad esempio, A è un racconto scritto e B è lo stesso racconto "*tradotto*" in immagini dipinte o nella forma teatrale della commedia o del balletto. I molti film tratti da romanzi hanno seguito questo processo di traduzione intersemiotica. Esempi di questo genere sono frequenti anche nella letteratura e nell'arte antica: si pensi alle pitture vascolari che riproducono scene dell'Iliade e dell'Odissea, ai gruppi marmorei dei frontoni e delle metope dei templi che narrano miti e leggende, ecc.

Non tutti e tre i tipi di "traduzione" sopra descritti sono presenti in matematica: la traduzione

interlinguistica infatti prevede la presenza di lingue diverse, ma la matematica, indipendentemente dai simboli utilizzati per i numeri, le lettere o le operazioni, è sicuramente *un'unica lingua universale*.
E ciò rende certamente più semplice l'interpretazione del linguaggio matematico.

La traduzione endolinguistica consiste, in matematica, nella trasformazione delle espressioni algebriche operate con le consuete *proprietà invariantive* applicate alle uguaglianze, alle equazioni ed ai sitemi di equazioni e disequazioni, che viene indicata normalmente come "calcolo algebrico" e che tanta parte hanno nelle applicazioni scolastiche a tutti i livelli.
In pratica, come mostreremo in seguito, *le operazioni che portano alla trasformazione delle espressioni algebriche, altro non sono che una traduzione endolinguistica*, così come è stata definita sopra, con la differenza sostanziale di una *completa e rigorosa coincidenza di significato* che, per le lingue parlate, corrisponderebbe ad una copia del testo.

Infatti, contrariamente a quanto accade con le lingue parlate, la traduzione endolinguistica in matematica deve restituire, se operata correttamente, *la stessa espressione originaria con lo stesso identico significato* e con la sola differenza nella forma che deve essere più semplice (vedere il significato di "semplificazione" più avanti) di quella precedente. Il simbolo "=" posto tra le varie formulazioni dell'espressione, assicura che *ogni rifacimento ha la stessa semantica e lo stesso valore di tutte le espressioni precedenti*. Non esiste quindi la possibilità che un'espressione possa essere modificata nel suo significato durante il suo sviluppo, a meno che non vengano commessi errori nella applicazione delle proprietà invariantive: ciò evidentemente facilita il lavoro del "traduttore", tanto più che le regole da applicare sono semplici e in numero molto ridotto; non esistono possibilità di diverse interpretazioni, non esistono eccezioni: *la matematica è certamente più semplice di tutte le altre lingue!*
Come conseguenza delle osservazioni precedenti, potremmo dire che, in matematica, i due tipi di traduzione endolinguistica ed interliguistica *vengono a coincidere* perchè, pur conservando la stessa lingua con la stessa sintassi precedente, come nella traduzione endolinguistica, viene peraltro a corrispondere ad una forma più facilmente interpretabile, come accade nella traduzione interlinguistica.

Per queste considerazioni, potremmo pensare al calcolo algebrico applicato alle espressioni anche come ad una traduzione interlinguistica *fedelissima* all'originale (come deve accadere nelle traduzioni scientifiche), per osservare che, così come nelle traduzioni interlinguistiche delle lingue parlate, anche in matematica, le trasformazioni devono corrispondere ad una loro *semplificazione* (la propria lingua è più semplice di una straniera, come il risultato finale di una serie di trasformazioni algebriche è più semplice dell'espressione originale).

Pertanto, come nella traduzione interlinguistica delle lingue parlate si procede *sempre ad una lettura dell'intero periodo per effettuare poi una sua scomposizione in frasi principali e secondarie,* stabilendo in tal modo una serie di interconnessioni, così, in matematica, *bisogna leggere l'intera* *espressione e poi scomporla in livelli successivi, distinguendo le espressioni che trattano termini da quelle che coinvolgono fattori*, poiché questi elementi di base devono essere trattati in modo sostanzialmente differente.

La traduzione intersemiotica consiste in matematica nella descrizione del problema con altri strumenti di rappresentazione: si pensi ad una rappresentazione geometrica di un teorema, a tutti i problemi di geometria analitica che possono essere descritti (e risolti) sia con metodi grafici che analitici, ecc.
In questo caso però la matematica non assicura la corrispondenza tra i due modelli, visto che il "traduttore" può modificare il significato dell'espressione originale non essendo precisato in maniera univoca il meccanismo della "traduzione".

Un parallelo tra l'Italiano e la Matematica

(con l'obiettivo di dimostrare l'estrema semplicita' del linguaggio matematico)

Italiano	***Matematica***
L'*analisi logica* consiste nell'identificare le categorie sintattiche presenti nella frase semplice, in base alle loro funzioni (soggetto, predicato, complementi, attributi, apposizioni)	L'*analisi logica* consiste nell'identificare i termini (TE), i fattori (FA) e gli operatori (di uguaglianza/disuguaglianza o funzionali); non esistono differenze logiche fra i vari termini o fra i vari fattori.
L'*analisi grammaticale* consiste nell'identificare le varie categorie grammaticali (o parti del discorso), in base al loro tipo: articolo, nome, aggettivo, pronome, verbo, avverbio, preposizione, congiunzione, interezione.	L'*analisi grammaticale* non esiste in quanto tutti i termini hanno la stessa funzione (possono essere sommati), cosi' come tutti i fattori (possono essere moltiplicati).
L'*analisi sintattica* della frase complessa consiste nell'identificare le varie specie di proposizioni o frasi semplici che la costituiscono (proposizione principale, coordinata, subordinata, ecc.)	L'*analisi sintattica* di un'espressione complessa consiste nell'identificare le varie espressioni semplici che la compongono: i termini (TE) sono sempre coordinati tra loro e la subordinazione e' stabilita dalla priorita' delle operazioni: potenze, moltiplicazioni e somme.
Le proposizioni sono separate tra loro da vari connettivi: , : ; (! ? ecc.	Le espressioni semplici sono separate tra loro da un operatore di confronto o operazionale oppure da una parentesi.

Italiano	*Matematica*
Per *frase* intendiamo una unita' del discorso di senso compiuto; una frase puo' essere costituita da una o piu' proposizioni; per proposizione si intende un segmento della frase fornito di predicato. In una frase semplice sono presenti almeno due elementi: il soggetto ed il predicato, tra loro in accordo di persona e numero. Il soggetto (costituito da un nome, un pronome, un'intera proposizione o sottinteso) e' cio' di cui parla il predicato, mentre questo (costituito da un verbo predicativo o dal verbo essere seguito da un aggettivo) dice qualcosa del soggetto	Per *espressione* intendiamo una scrittura in cui compaiono termini, fattori ed operatori; una espressione puo' essere costituita da piu' espressioni semplici. In queste sono presenti almeno due termini o almeno due fattori, separati tra loro da un operatore funzionale ed eventualmente da una parentesi. Non esiste alcuna diversa distinzione tra i componenti dell'espressione.
Una frase (**FR**) o una proposizione (**PR**) e' costituita a sua volta da gruppi di elementi linguistici che formano un'unita' a se' stante, indicata come *sintagma*. I sintagmi si distinguono in sintagmi nominali (**SN**) costituiti da un nome ed eventualmente da un articolo, un aggettivo, uno o piu' complementi) e sintagmi verbali (**SV**) costituiti da un verbo e da altri elementi. A loro volta i sintagmi nominali si possono suddividere in sintagmi aggettivali (**SA**) se contengono un aggettivo e sintagmi preposizionali (**SP**) se contengono una preposizione.	Un'espressione (ES), come già detto, è costituita solo da termini (TE), fattori (FA) legati tra loro da operatori di confronto e funzionali, che costituiscono i 'sintagmi' dell'espressione. Un termine o un fattore può a sua volta essere costituito da più termini o da più fattori, con una struttura certamente più semplice rispetto alle lingue parlate.
Quando si esegue l'*analisi dei costituenti immediati* di una frase, la si suddivide dapprima in un sintagma nominale (**SN**) ed uno verbale (**SV**) e successivamente ciascuna delle due parti viene scissa in altri costituenti fino ad arrivare agli elementi singoli: le parole.	Quando si esegue l'*analisi dei costituenti immediati* di una espressione la si suddivide dapprima in termini (TE) e fattori (FA) e successivamente ogni termine o fattore viene scisso in altri termini o fattori, fino ad arrivare agli elementi di base TB: monomi o numeri.

L'analisi dei costituenti immediati in **Italiano** puo' essere rappresentata da uno schema del tipo:

<table>
<tr><td colspan="2" align="center">FR
Il bravo traduttore di romanzi stranieri deve conservare la semantica dell'opera.</td></tr>
<tr><td align="center">SN
Il bravo traduttore di romanzi stranieri</td><td align="center">SV
deve conservare la semantica dell'opera.</td></tr>
</table>

SA Il bravo traduttore			**SN** di romanzi stranieri		**SV** deve conservare	**SN** la semantica dell'opera		
Art. il	**Agg.** bravo	**Nome** traduttore	**SP** di romanzi	**Agg.** stranieri	**Verbo** deve conservare	**Art.** la	**Nome** semantica	**SP** dell'opera
			Prep . di **Nome** romanzi					**Prep.** della **Nome** opera

L'analisi dei costituenti immediati in **Matematica** puo' essere rappresentata da uno schema del tipo:

ES $((a^2+b^3)-(a-b^3)(a^2-b))$					
TE a^2+b^3		**TE** $-(a-b^3)(a^2-b)$			
TE a^2	**TE** b^3	**FA** $-(a-b^3)$		**FA** a^2-b	
FA a a	**FA** b b b	**TE** a	**TE** b^3	**TE** a^2	**TE** b
			FA b b b	**FA** a a	

Molto più semplice dell'analogo per l'Italiano.

2) La semplificazione delle espressioni matematiche.

L'obiettivo della matematica è la risoluzione dei problemi rappresentati da modelli: quello algebrico è il più utilizzato, soprattutto al giorno d'oggi con la diffusione dei computer, ma ne esistono altri altrettanto potenti nella rappresentazione dei problemi, regolati strumenti linguistici differenti (grafici, geometrici, a blocchi, ecc.).

Per chiarezza dei lettori, diamo alcune definizioni che utilizzeremo di seguito:
Per ***espressione algebrica*** intendiamo un'*opportuna* combinazione di simboli letterali (a, b, x, ecc.), numerici e operazionali (+, -, *, ecc.) *ammessa dalla sintassi matematica.*
Per ***fattore*** intendiamo un'espressione algebrica che ne moltiplica (o divide) un'altra -che può anche essere il numero 1.
Per ***termine*** intendiamo un'espressione algebrica che viene sommata (o sottratta) ad un'altra -che

può anche essere il numero 0.
I fattori e i termini, combinati tra loro dai simboli operazionali, sono gli unici elementi di un'espressione algebrica.
Molte difficoltà degli studenti sono legate all'incapacità di distinguere tra loro i fattori dai termini (anche se può sembrare inverosimile) .

L'obiettivo del calcolo algebrico è di ridurre la complessità dell'espressione analizzata, legata a due elementi distinti: il **grado** dell'espressione ed il **numero dei suoi termini,** quindi:

*La semplificazione di un'espressione **deve** sempre tendere a:* ***a) ridurre il numero complessivo dei termini** e a* ***b) fattorizzare i polinomi**.*

Questi obiettivi sono legati a due semplici considerazioni pratiche:
a) *ridurre il numero dei termini* di un'espressione comporta una riduzione del numero delle operazioni da eseguire e permette di lavorare con espressioni più semplici, come possiamo facilmente constatare confrontando, ad esempio, il numero di operazioni necessarie per eseguire un calcolo con l'espressione:

$$x^6-a*x^5+b*x^4-a*b*x^3$$

che comporta 18 prodotti e 3 somme algebriche, o con quella equivalente alla precedente:

$$x^3*(x-a)*(x^2+b)$$

che comporta però, oltre alla semplificazione dei singoli valori, soltanto 5 prodotti e 2 somme algebriche.
La riduzione del numero dei termini è una regola da seguire *sempre* e quindi *si dovranno evitare tutte le operazioni che potrebbero portare ad un loro aumento*, a meno che queste non siano legate a successive semplificazioni di termini simili o a fattorizzazioni.
Facciamo esplicitamente notare che la fattorizzazione di un polinomio (ad esempio: $x^3-y^3=(x-y)(x^2+xy+y^2)$), in effetti, oltre a ridurre il grado massimo dei polinomi, riduce il numero dei termini (portandolo dai 2 originali ad 1 finale).

b) la *scomposizione in fattori dei polinomi* è legata invece alla considerazione che le espressioni sono un modello di rappresentazione dei problemi e che questi sono tanto più complessi quanto più alto è il loro grado.
Il criterio è generale: ogni problema complesso, per la sua soluzione, deve essere *scomposto* in più problemi semplici.
Le procedure da adottare per la scomposizione in fattori dei polinomi rispondono ad un'esigenza logica dell'uomo e non sono, come spesso vengono considerate, un inutile esercizio.
Le regole per la scomposizione non sono poi così astruse come si può pensare, ma sono classificabili con metodi generali, facilmente impiegabili in maniera automatica.

Con questo scritto ci proponiamo di delineare una metodologia generale per la lettura delle espressioni algebriche mediante la quale comprendere la successione logica dei passaggi necessari per la loro semplificazione ed evitare i normali errori grossolani che fanno tanto inorridire i docenti.

Per chiarire la procedura, facciamo subito un esempio applicandolo ad un'espressione algebrica frazionaria complessa:

Espressioni algebriche				Livelli
$\frac{(3x^4+6x^2y^2)}{(x^3+x^2y+2xy^2+2y^3)}-\frac{(3x^2y^2+6y^4)}{(x^3-x^2y+2xy^2-2y^3)}$				***Livello 0:*** (espressione assegnata)
$\frac{(3x^4+6x^2y^2)}{(x^3+x^2y+2xy^2+2y^3)}$		$\frac{(3x^2y^2+6y^4)}{(x^3-x^2y+2xy^2-2y^3)}$		***Livello 1:*** 2 **termini**
$(3x^4+6x^2y^2)$		$(x^3+x^2y+2xy^2+2y^3)$		***Livello 2:*** **2 fattori per il primo termine** del Livello 1
$(3x^2y^2+6y^4)$		$(x^3-x^2y+2xy^2-2y^3)$		***Livello 2:*** **2 fattori per il secondo termine** del Livello 1
$3x^4$	$6x^2y^2$			***Livello 3:*** **2 termini del primo fattore** del livello 2
x^3	x^2y	$2xy^2$	$2y^3$	***Livello 3:*** **4 termini del primo fattore** del livello 2
$3x^2y^2$	$6y^4$			***Livello 3:*** **2 termini del secondo fattore** del livello 2
x^3	$-x^2y$	$2xy^2$	$-2y^3$	***Livello 3:*** **4 termini del secondo fattore** del livello 2

Il livello successivo (in questo caso 4) è costituito dai fattori contenuti nei termini indicati al livello 3 (che, per brevità, non elenchiamo).
In generale, ma non sempre..., un fattore contiene alcuni termini e un termine contiene alcuni fattori e così via fino ad arrivare a singoli elementi (fattore semplice o termine semplice) come, nel nostro

caso, x oppure y oppure il numero -2.....
Ebbene, vale la seguente regola generale:

LE OPERAZIONI DI SEMPLIFICAZIONE POSSONO ESSERE EFFETTUATE <u>SOLO ALL'INTERNO DI UNO STESSO LIVELLO</u> SOMMANDO O SOTTRAENDO I TERMINI DI UNA STESSA RIGA DELLA TABELLA PRECEDENTE O, IN ALTERNATIVA, MOLTIPLICANDO (O DIVIDENDO) I FATTORI DI UNA STESSA RIGA DELLA TABELLA PRECEDENTE.

E' quindi essenziale distinguere i termini dai fattori perchè non è mai possibile sommare (o sottrarre) due fattori o moltiplicare (o dividere) due termini!!!

Ma questo è un errore ricorrente:

$$\frac{x+y^2}{x} = \frac{\cancel{x}+y^2}{\cancel{x}} = y^2$$

Senza rendercene conto, abbiamo *diviso* per un termine!!!

Andiamo a descrivere dettagliatamente la procedura da utilizzare in ogni caso, a aprtire dall'esempio.

<u>Livello 1:</u>
Individuati i 2 termini, si verifica se *siano simili tra loro* o se *esista un fattore comune a tutti:* nel primo caso, si sommano algebricamente, nel secondo si ***deve*** sempre mettere in evidenza il loro M.C.D.; in caso contrario si passa al livello successivo. Queste operazioni portano ad una riduzione del numero dei termini.
Nel nostro caso, i due termini:

$$\frac{(3x^4+6x^2y^2)}{(x^3+x^2y+2xy^2+2y^3)} \quad \text{e} \quad \frac{(3x^2y^2+6y^4)}{(x^3-x^2y+2xy^2-2y^3)}$$

non sono simili tra loro e non hanno fattori comuni, quindi si passa al livello successivo.
<u>Livello 2:</u>
Per il primo termine del liv. 1, si verifica se esistano fattori *multipli* uno dell'altro: nel caso lo fossero, si dividono per il loro M.C.D.; in caso contrario si passa al livello successivo.
Si esegue la stessa sequenza per il secondo termine del liv. 1.
Queste operazioni comportano, se eseguite, ad un abbassamento del grado complessivo.
Nel nostro caso, i 2 fattori del primo termine:

$$(3x^4+6x^2y^2) \quad \text{e} \quad (x^3+x^2y+2xy^2+2y^3)$$

come quelli del secondo:

$$(3x^2y^2+6y^4) \quad \text{e} \quad (x^3-x^2y+2xy^2-2y^3)$$

non sono multipli uno dell'altro e quindi si passa al livello successivo.
<u>Livello 3:</u>
Per ognuno dei fattori del liv. 2 (4 nel nostro caso), costituiti da alcuni *termini*, si verifica se siano simili tra loro o se esista un fattore comune a tutti: nel primo caso, si sommano algebricamente, nel

secondo si ***deve*** sempre mettere in evidenza il loro M.C.D.; in caso contrario, si passa al livello successivo. *(notare che la procedura utilizzata è la stessa del livello 1, perchè, in tutti e due i casi, stiamo trattando termini)*
Si ripete la stessa procedura per tutti gli altri fattori del liv. 2.
Nel nostro caso,
il *primo* fattore del liv. 2 è costituito da 2 termini non simili tra loro, ma con un fattore comune a tutti e due ($3x^2$) e quindi può essere riscritto nel seguente modo:

$3x^4+6x^2y^2=3x^2(x^2+2y^2)$ *(notiamo che il numero dei termini passa da 2 ad 1)*

il *secondo* fattore del liv. 2 è costituito da 4 termini non simili tra loro, senza alcun fattore comune a tutti e quattro, ma è possibile *raccogliere un fattore comune ai primi due termini* (portando in tal modo il numero dei termini da 4 a 2) e quindi può essere riscritto nel seguente modo:

$x^3+x^2y+2xy^2+2y^3=x^2(x+y)+2y^2(x+y)$ *(notiamo che il numero dei termini passa da 4 a 2)*

a questo punto, si osserva che esiste un fattore comune a tutti e due i termini e quindi è possibile metterlo in evidenza, ottenendo:

$x^2(x+y)+2y^2(x+y)=(x+y)(x^2+2y^2)$ *(che riduce il numero di termini da 2 ad 1).*

Questa procedura è effettivamente conveniente solo quando sia possibile ottenere due termini con un ulteriore fattore comune.
Il *terzo* fattore è costituito da 2 termini e, con la stessa procedura, può essere riscritto:

$3x^2y^2+6y^4=3y^2(x^2+2y^2)$ *(che riduce il numero di termini da 2 ad 1);*

Il *quarto* fattore è costituito da 4 termini e, con la stessa procedura, può essere riscritto:

$x^3-x^2y+2xy^2-2y^3=x^2(x-y)+2y^2(x-y)=(x-y)(x^2+2y^2)$ *(che riduce i termini da 4 a 1)*;

L'espressione originale può quindi essere riscritta:

$$\frac{(3x^2(x^2+2y^2))}{((x+y)(x^2+2y^2))}-\frac{(3y^2(x^2+2y^2))}{((x-y)(x^2+2y^2))}$$

La situazione è cambiata e quindi si deve ricominciare la procedura da capo, a partire dall'ultima versione dell'espressione.

Livello 1:
Si osserva che fra i 2 termini esistono alcuni fattori comuni, che si possono raccogliere a fattore:

$$\frac{(3x^2(x^2+2y^2))}{((x+y)(x^2+2y^2))}-\frac{(3y^2(x^2+2y^2))}{((x-y)(x^2+2y^2))}=\frac{(3(x^2+2y^2))}{(x^2+2y^2)}\left(\frac{x^2}{(x+y)}-\frac{y^2}{(x-y)}\right)=3\left(\frac{x^2}{(x+y)}-\frac{y^2}{(x-y)}\right)$$

Abbiamo ottenuto il risultato importante di ridurre l'espressione originale ad un solo termine con elementi di calcolo molto più semplici di quelli originali.

Essendo il termine uno solo, non ci resta altro da fare se non passare al livello successivo, analizzandone i due fattori.
Livello 2:
Non conviene eseguire la moltiplicazione indicata *perchè ciò aumenterebbe il numero dei termini*, e non conviene neppure eseguire la 'somma' dei 2 termini in parentesi perchè si otterrebbe un

polinomio di terzo grado irriducibile. Il risultato finale è dunque:

$$3\left(\frac{x^2}{(x+y)}-\frac{y^2}{(x-y)}\right)$$

che è *un termine irriducibile,* non esistendo alcun *fattore* comune.

Prima di presentare altri esempi di applicazione del metodo, conviene fornire alcune *regole per il riconoscimento di prodotti notevoli da utilizzare nella scomposizione dei polinomi in fattori.*

3) Regole generali per la scomposizione di un polinomio in fattori

3.a) Riconoscimento della potenza n-sima di un binomio.

Alcune immediate condizioni *necessarie* (ma non sufficienti) per il riconoscimento di una potenza n-sima di un binomio:

esistono x^n ed y^n, con x ed y basi della potenza n-sima di x-y [$(x-y)^n$] o x+y [$(x+y)^n$]

il polinomio ha n+1 termini (cioè, ad esempio: $(x+y)^5$ ha 6 termini)

Verificate queste semplici condizioni necessarie, controllare che il polinomio contenga *tutte le potenze* (dalla massima a zero) in tutte e due le basi e che, in aggiunta, i *suoi termini siano moltiplicati per i corrispondenti coefficienti del triangolo di Tartaglia* (vedere più avanti nel paragrafo).

Note:

- Per facilitare il riconoscimento, conviene ordinare il polinomio.
- Nei casi più complessi, una volta individuate le due basi, conviene costruire autonomamente la potenza del binomio e verificarne la coincidenza con quello assegnato.

Il metodo utilizzato per il riconoscimento è suggerito da quello impiegato per la sua creazione: *La potenza n-sima (con n = 2, 3, 4, ...) di un binomio è sempre un polinomio **omogeneo** di grado n nelle basi* (cioè tutti i suoi termini hanno lo stesso grado n complessivo nelle due basi)*, **ordinato** secondo le potenze decrescenti della prima base e crescenti della seconda* (cioè, nel passaggio da un termine a quello successivo, la prima base diminuisce di un grado mentre la seconda aumenta, sempre di un grado) *e **completo*** (cioè contiene tutte le potenze tra la massima n e 0) *e ciascun termine è moltiplicato per l'opportuno coefficiente del triangolo di Tartaglia:*

1

1 2 1

1 3 3 1

1 4 6 4 1

....

In pratica, per costruire la potenza n-sima di un binomio, conviene seguire la procedura seguente (viene riportato un esempio per la potenza $(3ax^2-7b^2y^3)^4$):

1) si scrivano i termini del polinomio (che dovrà avere n+1 elementi), a partire dalla potenza n-sima

della prima base, diminuendo, per ogni termine, di 1 grado quello della prima base ed aumentando di 1 grado quello della seconda, con segni alternati nel caso $(x-y)^n$ e con tutti segni positivi nel caso $(x+y)^n$.

Nel nostro esempio:

$$(3ax^2)^4-(3ax^2)^3(7b^2y^3)+(3ax^2)^2(7b^2y^3)^2-(3ax^2)(7b^2y^3)^3+(7b^2y^3)^4$$

2) si moltiplichino i termini per i corrispondenti coefficienti del triangolo di Tartaglia;
   Nel nostro esempio: 1, 4, 6, 4, 1
3) si eseguano i calcoli indicati.
   Nel nostro esempio:

$$(3ax^2)^4-4*(3ax^2)^3(7b^2y^3)+6*(3ax^2)^2(7b^2y^3)^2-4*(3ax^2)(7b^2y^3)^3+(7b^2y^3)^4$$
$$\textit{che fornisce:}$$
$$81a^4x^8-756a^3x^6b^2y^3+2646a^2x^4b^4y^6-4116ax^2b^6y^9+2401b^8y^{12}$$

Notare esplicitamente che il polinomio finale, in generale, non è più né omogeneo, né completo...

Nei casi più complessi (come nell'esempio riportato), conviene utilizzare la procedura indicata in tutti i suoi passi; solo in quelli molto semplici è consigliabile eseguire direttamente i calcoli.

3.b) Riconoscimento della somma o della differenza di due potenze con ugual esponente.

Nota: Vista la comodità e la frequenza negli esercizi applicativi di questi tipi di prodotti notevoli, *in presenza di 2 soli termini*, conviene sempre verificare che si presenti il caso favorevole, anche quando non è evidente a primo acchito, come nell'esempio: x^2-5 che può peraltro essere scritto:

$$x^2-5=x^2-\sqrt{5}^2=(x-\sqrt{(5)})(x+\sqrt{(5)})$$

In presenza della somma o differenza di 2 potenze con ugual esponente, risulta molto utile la seguente “tabellina” dei prodotti notevoli, che può essere utilizzata sia per l'esecuzione di prodotti notevoli che per la scomposizione in fattori:

	x^n - y^n	x^m + y^m
x - y	**sempre** **+ + +**	**m pari** **+ + +**
x + y	**mai**	**m dispari** **+ - +**

In cui, nella *prima riga* sono riportati i polinomi da dividere per quelli di I grado della *prima colonna*, mentre nelle caselle centrali è indicato *quando* la divisione è a resto 0 (cioè quando i due polinomi sono divisibili l'uno per l'altro): ad esempio, “*m dispari*” significa che $x^m + y^m$ è divisibile

per (x + y) quando m è dispari; la sequenza dei segni riportati indicano simbolicamente che il polinomio quoziente ha tutti segni positivi (+ + +) o segni alternati (+ - +).
L'importanza di questi prodotti notevoli risiede nel fatto che è nota *a priori* la forma del quoziente costituito sempre da un polinomio ***omogeneo*** (di grado n-1 o m-1, a seconda dei casi), ***ordinato*** e ***completo*** (vedere le definizioni nel paragrafo precedente), del tutto simile a quello delle potenze del binomio, ad eccezione dei coefficienti del triangolo di Tartaglia che, in questo caso, non figurano.
Ad esempio:

$$\frac{(x^3+y^3)}{(x+y)}=(x^2-xy+y^2)$$
$$o\,anche:$$
$$(x^3+y^3)=(x+y)(x^2-xy+y^2)$$

La stessa tabellina può essere utilizzata anche in senso inverso per trovare immediatamente, nella prima riga, il prodotto del polinomio di primo grado della prima colonna, per uno omogeneo, ordinato e completo con i segni indicati, di grado n-1 o m-1, a seconda dei casi.
Ad esempio:

$$(x-y)(x^5+x^4y+x^3y^2+x^2y^3+xy^4+y^5)=x^6-y^6$$

Nota: Nei casi particolari delle differenze di due *quarte* potenze o di due *seste* potenze, la scomposizione più favorevole è quella sotto riportata:

$$x^4-y^4=(x^2)^2-(y^2)^2=(x^2-y^2)(x^2+y^2)=(x+y)(x-y)(x^2+y^2)$$
$$e\,,rispettivamente:$$
$$x^6-y^6=(x^3)^2-(y^3)^2=(x^3-y^3)(x^3+y^3)=(x-y)(x^2+xy+y^2)(x+y)(x^2-xy+y^2)$$

che forniscono polinomi di grado inferiore rispetto a quelli che si otterrebbero con la “tabellina” di grado 3° e 5°, rispettivamente.

3.c) Applicabilità del teorema di Ruffini

Quando i metodi precedenti non sono sufficienti a scomporre un polinomio in fattori, si può cercare un divisore di primo grado ***x-a***, con ***a*** costante, per il polinomio:

$$P_n(x)=x^n+c_{n-1}x^{(n-1)}+c_{n-2}x^{(n-2)}+c_{n-3}x^{(n-3)}+.....+c_0$$

(con c_{n-1}, c_{n-2}, ...c_0 costanti) in modo tale che sia possibile riscrivere $P_n(x)$ come prodotto di x-a per un opportuno polinomio $P_{n-1}(x)$ di grado n-1 nella variabile x:

$$P_n(x)=x^n+c_{n-1}x^{(n-1)}+c_{n-2}x^{(n-2)}+.....+c_0=(x-a)(x^{(n-1)}+b_{n-2}x^{(n-2)}+b_{n-3}x^{(n-3)}+.....+b_0)$$

ove le costanti b_{n-2}, b_{n-3}, ..., b_0 sono i coefficienti del quoziente $P_n(x)/(x-a)$.
Tale ricerca può essere effettuata applicando il teorema di Ruffini:
Il polinomio $P_n(x)$, di grado n nella variabile x, con coefficienti c_{n-1}, c_{n-2}, ...c_0 costanti, è divisibile per il polinomio di primo grado (x-a), con a costante, se $P_n(a) = 0$ (cioè se risulta nullo il

polinomio $P_n(x)$ quando alla variabile x venga sostituito il valore a).
In tal caso dunque: $\boldsymbol{P_n(x) = (x-a)\, P_{n-1}(x)}$, ove $P_{n-1}(x)$ è il polinomio di grado n-1 nella variabile x uguale al quoziente $P_n(x)/(x-a)$.
Naturalmente nulla vieta di riapplicare il teorema di Ruffini anche al polinomio $P_{n-1}(x)$.....

Nota:
Per la ricerca del divisore x-a, è naturalmente sufficiente determinare il valore del parametro 'a'; questo è sicuramente uno dei divisori del termine noto c_0 del polinomio $P_n(x)$ perchè, qualunque sia $P_n(x)$ (e quindi qualunque sia $P_{n-1}(x)$), se accade che $P_{n-1}(x)(x-a) = P_n(x)$, il termine noto c_0 di $P_n(x)$ dovrà essere uguale al prodotto di a per il termine noto di $P_{n-1}(x)$, essendo l'unico termine di grado 0 (cioè non contenente la variabile x).

Il teorema quindi si applica normalmente verificando se $P_n(a) = 0$ per tutti i divisori di c_0.

Nota:
Nella sostituzione della variabile x con il valore costante a, bisogna tener presente che il teorema afferma la divisibilità per (x-a) e quindi, se il divisore è del tipo (x-2), cioè se a = 2, si deve sostituire 2 ad x, ma se il divisore è del tipo (x+2), si deve sostituire ad x il numero -2, in quanto x+2 = x-(-2)). Fare attenzione!!

Esempio di applicazione del teorema di Ruffini:
Trovare un divisore (x-a) del polinomio: $x^2 - 5x + 6$
I divisori del numero 6 (termine noto del polinomio) sono: ±6, ±3, ±2, ±1 e la ricerca deve essere effettuata con tutti:

x - a	**a**	**P(a)**	**Risultato**
x - 6	6	$36 - 30 + 6 \neq 0$	NON divisibile
x + 6	-6	$36 + 30 + 6 \neq 0$	NON divisibile
x - 3	3	$9 - 15 + 6 = 0$	**x – 3 è un divisore**
x + 3	-3	$9 + 15 + 6 \neq 0$	NON divisibile
x - 2	2	$4 - 10 + 6 = 0$	**x – 2 è un divisore**
x + 2	-2	$4 + 10 + 6 \neq 0$	NON divisibile
x - 1	1	$1 - 5 + 6 \neq 0$	NON divisibile
x + 1	-1	$31 + 5 + 6 \neq 0$	NON divisibile

Osservazioni:
- La ricerca va fatta con criterio: nel nostro caso, ad esempio, salta agli occhi che tutti i divisori del tipo (x+a) non possono mai portare all'annullamento del polinomio, risultando tutti i termini positivi.

- Una volta determinati n divisori per il polinomio di grado n, è inutile proseguire perchè sicuramente non ne esistono altri, a norma del teorema fondamentale dell'algebra.
- Non è detto che il divisore del termine noto sia un numero intero, come accade, ad esempio, per il polinomio: $x^2+8\frac{x}{3}-1$ che è divisibile per $x-\frac{1}{3}$

Il teorema di Ruffini è quindi uno strumento che solo nei casi più semplici permette la scomposizione in fattori del polinomio, ma, nonostante ciò, le sue applicazioni pratiche sono molto comuni.

Dall'ultima osservazione fatta si ricava un metodo di fattorizzazione fondamentale:

3.d)Scomposizione in fattori mediante la ricerca di soluzioni dell'equazione $P_n(x) = 0$

Se si possono trovare le soluzioni dell'equazione:

$$P_n(x)=c_n x^n+c_{n-1}x^{(n-1)}+c_{n-2}x^{(n-2)}+c_{n-3}x^{(n-3)}+....+c_0=0$$

(supponiamo siano $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$), *per definizione* si ha che:

$$P_n(x)=c_n(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)\ ....(x-x_n)=0$$

In definitiva, *per scomporre un polinomio qualsiasi di grado n $P_n(x)$, è **sempre** possibile ricercare le soluzioni della corrispondente equazione $P_n(x) = 0$ e, in caso positivo, riscrivere il polinomio come prodotto di più fattori* $P_n(x)=c_n(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)\ ....(x-x_n)$ *se $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$ sono le n soluzioni trovate.*

Ovviamente, non è necessario trovare *tutte* le soluzioni $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$ per poter scrivere:

$P_n(x)=c_n(x-x_1)(x-x_2)(P_{n-2}(x))$ se x_1, x_2 soluzioni e $P_{n-2}(x)$ polinomio di grado n-2.

Dalle considerazioni fatte si ricava facilmente il seguente

4) Procedimento ricorsivo per la semplificazione delle espressioni algebriche:

<u>Ad ogni successiva trasformazione dell'espressione</u>, cioè ad ogni passaggio individuato da un qualche cambiamento, applicare la seguente procedura per <u>tutti</u> i polinomi di grado maggiore di 1:

1) **Contare i termini dell'espressione e raccogliere a fattor comune il M.C.D. di <u>tutti</u> i termini o tentare il raccoglimento parziale (se del caso);**
2) **Considerare che:**

<u>se i termini sono solo 2:</u>

- **il polinomio potrebbe essere la *differenza o la somma di due potenze* con ugual esponente, nel qual caso è possibile utilizzare la '*tabellina*' riportata al § 3.a.**

In caso positivo, ripartire dal punto* 1) *dello schema, in caso negativo passare ad un altro polinomio.

<u>se i termini sono 3:</u>

- **il polinomio potrebbe essere il *quadrato* di un binomio (v. § 3.b),**
- **il polinomio potrebbe avere un divisore di 1° grado (v. teorema Ruffini § 3.c),**
- **si possono trovare le soluzioni dell'equazione corrispondente (v. § 3.d);**

In caso positivo, ripartire dal punto* 1) *dello schema, in caso negativo passare ad un altro polinomio.

<u>se i termini sono 4:</u>

- **il polinomio potrebbe essere il *cubo* di un binomio (v. § 3.b), o**
- **è conveniente il raccoglimento parziale (2 a 2, più raramente 3 a 1), o**
- **il polinomio potrebbe avere un divisore di 1° grado (v. teorema Ruffini § 3.c),**
- **si possono trovare le soluzioni dell'equazione corrispondente (v. § 3.d);**

In caso positivo, ripartire dal punto* 1) *dello schema, in caso negativo passare ad un altro polinomio.

<u>se i termini sono 5:</u>

- **il polinomio potrebbe essere la *quarta potenza* di un binomio (v. § 3.b),**
- **è conveniente il raccoglimento parziale (3 a 2),**
- **il polinomio potrebbe avere un divisore di 1° grado (v. teorema Ruffini § 3.c),**
- **si possono trovare le soluzioni dell'equazione corrispondente (v. § 3.d);**

In caso positivo, ripartire dal punto* 1) *dello schema, in caso negativo passare ad un altro polinomio.

<u>se i termini sono 6:</u>

- **il polinomio potrebbe essere il la *quinta potenza* di un binomio (v. § 3.b),**
- **è conveniente il raccoglimento parziale (2 a 2 o 3 a 3),**
- **il polinomio potrebbe essere il *quadrato di un trinomio*,**
- **il polinomio potrebbe avere un divisore di 1° grado (v. teorema Ruffini § 3.c),**
- **si possono trovare le soluzioni dell'equazione corrispondente (v. § 3.d);**

In caso positivo, ripartire dal punto* 1) *dello schema, in caso negativo passare ad un altro polinomio.

Nota importante: per l'applicazione del metodo (che risolve praticamente tutti i problemi di fattorizzazione dei polinomi) è ***essenziale*** che, ad ogni modifica dell'espressione il procedimento venga ripreso dal punto 1).

Legenda: TE = Termine; **FA** = Fattore; n **FC** = n Fattori comuni; **NFC** = nessun fattore comune.

Per semplificare una qualsiasi espressione algebrica, bisogna analizzarne le parti componenti fin dal livello iniziale ed effettuare, ad ogni livello successivo, le operazioni permesse a seconda degli elementi considerati:

1. *semplificare i fattori comuni o scomporre in fattori i polinomi di grado maggiore di 1 (fra fattori)*
2. *sommare i termini simili o mettere in evidenza eventuali fattori comuni (fra termini)*

La prima operazione serve a ***ridurre il grado*** *dei singoli polinomi e la seconda a* ***ridurre il numero*** *dei termini.*

Negli esempi che seguono, per questioni puramente grafiche, le operazioni sono riportate in tabelle differenti (analisi dei termini), ma invece devono essere eseguite in un unico passaggio.

Esempio n. 1:

$\frac{1}{(ax-ay+bx-by)}-\frac{1}{(a+b)}+\frac{1}{(y-x)}$	3 TE, NFC

Analisi dei 3 termini: primo termine

$\frac{1}{(ax-ay+bx-by)}$	2 FA, NFC			
Analisi dei FA				
$ax-ay+bx-by$	4 TE, NFC --> procedo al raccoglimento parziale	$a(x-y)+b(x-y)$	2 TE, 1 FC --> metto in evidenza	$(a+b)(x-y)$
Riscrivo il primo termine	$\frac{1}{((a+b)(x-y))}$			

Il secondo e terzo termine non sono riducibili.

Riscrivo l'espressione

$(\frac{1}{((a+b)(x-y))}-\frac{1}{(a+b)}+\frac{1}{(y-x)})$	3 TE, NFC --> per ridurre il numero dei termini, devo sommare	$(\frac{(1-x+y-a-b)}{((a+b)(x-y))})$	Non conviene eseguire la somma perche' i termini non risultano simili

---

Esempio n. 2:

$(\frac{1}{(x-1)}-\frac{(x-1)}{(x^2-x)}-\frac{1}{(x-x^2)}+\frac{2}{(x^3-x)})$	4 TE, NFC

Analisi dei 4 termini:

Il primo termine non e' riducibile

Analisi del secondo termine:

$\frac{-(x-1)}{(x^2-x)}$	2 FA, NFC			
Analisi dei FA				
x^2-x	2TE, 1 FC --> metto in evidenza	$x(x-1)$		
Riscrivo il secondo termine	$\frac{-(x-1)}{(x(x-1))}$	2 FA, 1 FC --> semplifico	$(\frac{-1}{x})$	

Analisi del terzo termine:

$\frac{-1}{(x-x^2)}$	2 FA, NFC			
Analisi dei FA				
$x-x^2$	2TE, 1 FC --> evidenzio	$x(1-x)$		
Riscrivo il terzo termine	$\frac{-1}{(x(1-x))}$	2 FA, NFC		

Analisi del quarto termine:

$\frac{2}{(x^3-x)}$	2 FA, NFC			
Analisi dei FA				
x^3-x	2TE, 1 FC --> metto in evidenza	$x(x^2-1)$	Riconosco PN	$x(x-1)(x+1)$
Riscrivo il quarto termine	$\frac{2}{(x(x-1)(x+1))}$	2 FA, NFC		

Riscrivo l'espressione:

$(\frac{1}{(x-1)}-\frac{1}{x}-\frac{1}{(x(1-x))}+\frac{2}{(x(x-1)(x+1))})$	4 TE, NFC Per ridurre il numero dei termini, eseguo la somma
$\frac{2}{(x(x-1)(x+1))}$	1 TE, 2 FA, NFC

Esempio n. 3:

$\frac{(2x^2-2)}{(4x^3+6x^2-4x-6)}+\frac{(x-5)}{(25-10x+x^2)}$	2 TE, NFC

Analisi dei 2 termini: primo termine:

$\frac{(2x^2-2)}{(4x^3+6x^2-4x-6)}$	2 FA, NFC			
Analisi dei FA				
$2x^2-2$	2TE, 1 FC --> metto in evidenza	$2(x^2-1)$		
$4x^3+6x^2-4x-6$	4 TE, 1 FC --> metto in evidenza	$2(2x^3+3x^2-2x-3)$	Riscrivo sotto	

$2(2x^3+3x^2-2x-3)$	4 TE, NFC eseguo raccoglimento parziale	$2(2(x^3-x)+3(x^2-1))$	Analizzo i TE interni	
	x^3-x	2 TE, 1 FC --> metto in evidenza	$x(x^2-1)$	Riscrivo
$2(2x(x^2-1)+3(x^2-1))$	2 TE, 1FC metto in evidenza	$2((x^2-1)(2x+3))$		
Riscrivo il primo termine	$\frac{(2(x^2-1))}{(2(x^2-1)(2x+3))}$	2 FA, 2 FC --> semplifico	$\frac{1}{(2x+3)}$	

Analisi del secondo termine:

$\frac{(x-5)}{(25-10x+x^2)}$	2 FA, NFC		
Analisi dei FA			
$25-10+x^2$	3 TE, NFC Riconosco PN	$(5-x)^2$	
Riscrivo il secondo termine	$\frac{(x-5)}{(5-x)^2}$	2 FA, 1 FC --> semplifico	$\frac{-1}{(5-x)}$

Riscrivo l'espressione:

$\frac{1}{(2x+3)}-\frac{1}{(5-x)}$	2 TE, NFC --> per ridurre il numero dei termini, sommo	$\frac{(5-x-2x-3)}{((2x+3)(5-x))}$ sommo termini simili	$\frac{(-3x+2)}{((2x+3)(5-x))}$	1 TE, NFC Fine

---

Esempio n. 4:

$\frac{1}{(x+2y)}+\frac{(x-2y)}{(x^2-2xy+4y^2)}-\frac{x^2}{(x^3+8y^3)}-\frac{(x(x-2y))}{(x^3+8y^3)}$	4 TE, NFC

Analisi dei 4 termini:

Il primo termine non e' riducibile.

Analisi del secondo termine:

$\frac{(x-2y)}{(x^2-2xy+4y^2)}$	2 FA, NFC	
Analisi dei FA		
$x^2-2xy+4y^2$	3 TE, NFC, irriducibile	
Riscrivo il primo termine	$\frac{(x-2y)}{(x^2-2xy+4y^2)}$	2 FA, NFC

Analisi del terzo termine:

$\frac{-x^2}{(x^3+8y^3)}$	2 FA, NFC		
Analisi dei FA			
x^3+8y^3	2 TE, NFC Riconosco PN	$(x+2y)(x^2-2xy+4y^2)$	1TE, 2 FA, NFC

Riscrivo il terzo termine	$\frac{-x^2}{((x+2y)(x^2-2xy+4y^2))}$	2 FA, NFC	

Analisi del quarto termine:

$\frac{-(x(x-2y))}{(x^3+8y^3)}$	2 FA, NFC		
Analisi dei FA			
x^3+8y^3	2 TE, NFC Riconosco PN	$(x+2y)(x^2-2xy+4y^2)$	1TE, 2 FA, NFC
Riscrivo il quarto termine	$\frac{-(x(x-2y))}{((x+2y)(x^2-2xy+4y^2))}$	2 FA, NFC	

Riscrivo l'espressione:

$\frac{1}{(x+2y)}+\frac{(x-2y)}{(x^2-2xy+4y^2)}-\frac{x^2}{((x+2y)(x^2-2xy+4y^2))}-\frac{(x(x-2y))}{((x+2y)(x^2-2xy+4y^2))}$	4 TE, NFC per ridurre il numero deitermini, sommo
$\frac{((x^2-2xy+4y^2)+(x-2y)(x+2y)-x^2-x(x-2y))}{((x+2y)(x^2-2xy+4y^2))}$	1 TE, 2FA, NFC
$\frac{(x^2-2xy+4y^2+x^2-4y^2-x^2-x^2+2xy)}{((x+2y)(x^2-2xy+4y^2))}$	Sommo i termini simili
0	Fine