Potenze reali ad esponente reale

Legenda:

N è l'insieme dei numeri naturali (0, 1 , 2, 3, ...)

N_0 è l'insieme dei numeri naturali ad esclusione dello zero (1, 2, 3, ...)

Z è l'insieme dei numeri interi (..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...)

L'insieme dei numeri interi può essere definito a partire da una relazione d'equivalenza fra coppie di numeri naturali:

$$((x,y) \text{ è equivalente a } (x',y')) \Leftrightarrow (x-y = x'-y')$$

In altre parole, un numero intero è costituito dalle infinite coppie di numeri naturali la cui differenza è costante, ad esempio:

(7,2), (10,5), (18,13), ... che rappresentano il numero intero +5, o invece:

(3,6), (11,14), (0,3), ... che rappresentano invece il numero intero -3.

Z_0 è l'insieme dei numeri interi ad esclusione dello zero (..., -3, -2, -1, 1, 2, 3, ...)

Z_0^+ è l'insieme dei numeri interi strettamente positivi (+1, +2, +3, ...)

Z_0^- è l'insieme dei numeri interi strettamente negativi (-1, -2, -3, ...)

Q è l'insieme dei numero razionali ($\pm \frac{m}{n}$ con $n \neq 0$, $m \in \mathrm{N}$, $n \in \mathrm{N}_0$)

L'insieme dei numeri razionali può essere definito a partire da una relazione d'equivalenza fra coppie di numeri interi:

$$((x,y) \text{ è equivalente a } (x',y')) \Leftrightarrow (x/y = x'/y'), \ con\ y \neq 0 \text{ e } y' \neq 0$$

In altre parole, un numero razionale è costituito dalle infinite coppie di numeri interi il cui rapporto è costante, ad esempio:

(15,12), (35,28), (10,8), ... che rappresentano il numero razionale +5/4, o invece:

(-6,10), (8,-20), (-10,25), ... che rappresentano invece il numero razionale -2/5.

Q_0 è l'insieme dei numero razionali ad esclusione dello zero ($\pm \frac{m}{n}$ con $n \neq 0$, m e $n \in \mathrm{N}_0$)

Q_0^+ è l'insieme dei numero razionali strettamente positivi ($+ \frac{m}{n}$ $con\, n \neq 0$, m e $n \in \mathrm{N}_0$)

Q_0^- è l'insieme dei numero razionali strettamente negativi ($- \frac{m}{n}$ $con\, n \neq 0$, m e $n \in \mathrm{N}_0$)

R è l'insieme dei numeri reali

R_0 è l'insieme dei numeri reali $\neq 0$

R_0^+ è l'insieme dei numeri reali strettamente positivi

R_0^- è l'insieme dei numeri reali strettamente negativi

Potenze con esponente naturale: $n \in N \rightarrow y = a^n, a \in R \, e \, y \in R$

Si chiama potenza di base 'a' reale ($a \in R$) ad esponente naturale n ($n \in N$), il prodotto di n fattori tutti uguali ad 'a'.

Dalla definizione di potenza reale ad esponente naturale, si deducono facilmente le seguenti proprietà fondamentali:

$$a^n * a^m = (a*a*a*.....)[n\,volte]*(a*a*a*.....)[m\,volte] = (a*a*a*.....)[n+m\,volte] = a^{n+m}$$

$$\frac{a^n}{a^n} = \frac{((a*a*a*.....)[n\,volte])}{((a*a*a*.....)[n\,volte])} = a^0 = 1$$

$$\frac{a^n}{a^m} = \frac{((a*a*a*.....)[n\,volte])}{((a*a*a*.....)[m\,volte])} \quad \textit{che può portare } a:$$

$$(a*a*a*.....)[p\,volte\,se\,p = n-m > 0, cioè\,se\,n > m] = a^p$$

oppure:

$$\frac{1}{((a*a*a*.....)[q\,volte\,se\,q = m-n > 0, cioè\,se\,m > n])} = \frac{1}{a^q} = a^{-q}$$

che sono sintetizzabili nelle ben note relazioni:

$$a^x * a^y = a^{(x+y)} \qquad \frac{(a^x)}{(a^y)} = a^{(x-y)}$$

$$(a^x)^y = a^{(x*y)} \qquad a^x * b^x = (a*b)^x$$

$$\frac{a^x}{b^x} = \left(\frac{a}{b}\right)^x$$

Se, in particolare, l'esponente *n* è nullo, si pone $a^0 = 1 \quad \forall$ a ∈ R. Infatti:

$$\frac{a^m}{a^m} = a^0 = 1$$

visto che sia il numeratore (a^m) che il denominatore (a^m) corrispondono allo stesso prodotto di *m* fattori uguali.

La funzione è a valori discreti, definita per tutti gli $n \in N$ e per ogni valore reale di $a \in R$.

Se $a = 1$, $a^n = 1 \quad \forall \quad n \in N$.

Se $a = 0$, $a^n = 0 \quad \forall \quad n \in N_0$, 0^0 non ha significato.

Di seguito esempi di potenze di numeri reali ad esponente naturale:

Esponente	(-3)^n	(-2)^n	(-0,5)^n	(0,5)^n	2^n	3^n
0	1,00	1,00	1,0000	1,0000	1,00	1,00
1	-3,00	-2,00	-0,5000	0,5000	2,00	3,00
2	9,00	4,00	0,2500	0,2500	4,00	9,00
3	-27,00	-8,00	-0,1250	0,1250	8,00	27,00
4	81,00	16,00	0,0625	0,0625	16,00	81,00
5	-243,00	-32,00	-0,0313	0,0313	32,00	243,00
6	729,00	64,00	0,0156	0,0156	64,00	729,00
7	-2.187,00	-128,00	-0,0078	0,0078	128,00	2.187,00
8	6.561,00	256,00	0,0039	0,0039	256,00	6.561,00
9	-19.683,00	-512,00	-0,0020	0,0020	512,00	19.683,00
10	59.049,00	1.024,00	0,0010	0,0010	1.024,00	59.049,00
11	-177.147,00	-2.048,00	-0,0005	0,0005	2.048,00	177.147,00
12	531.441,00	4.096,00	0,0002	0,0002	4.096,00	531.441,00
13	-1.594.323,00	-8.192,00	-0,0001	0,0001	8.192,00	1.594.323,00
14	4.782.969,00	16.384,00	0,0001	0,0001	16.384,00	4.782.969,00
15	-14.348.907,00	-32.768,00	-0,0000	0,0000	32.768,00	14.348.907,00
16	43.046.721,00	65.536,00	0,0000	0,0000	65.536,00	43.046.721,00
17	-129.140.163,00	-131.072,00	-0,0000	0,0000	131.072,00	129.140.163,00
18	387.420.489,00	262.144,00	0,0000	0,0000	262.144,00	387.420.489,00
19	-1.162.261.467,00	-524.288,00	-0,0000	0,0000	524.288,00	1.162.261.467,00
20	3.486.784.401,00	1.048.576,00	0,0000	0,0000	1.048.576,00	3.486.784.401,00

Potenze con esponente intero positivo: $z \in Z_0^+ \rightarrow y = a^z, a \in R, y \in R$

Si chiama potenza di base 'a' reale ($a \in R$) ad esponente intero positivo z ($z \in Z_0^+$), il prodotto di z fattori tutti uguali ad 'a'.

La funzione è a valori discreti, definita per tutti gli e $z \in Z_0^+$ per ogni valore reale di $a \in R$.

Valgono le stesse considerazioni precedenti per *a = 1* e per *a = 0*.

La tabellina dei valori è uguale alla precedente.

Potenze con esponente intero negativo: $z \in Z_0^- \rightarrow y = a^z, a \in R, y \in R$

Si chiama potenza di base 'a' reale ($a \in R$) ad esponente intero negativo z ($z \in Z_0^-$), l'inverso della potenza con la stessa base e lo stesso esponente.

In altri termini, $a^z = \frac{1}{a^{-z}}$, *con* $z < 0$ *e quindi* $-z > 0$ per le proprietà delle potenze sopra ricordate.

La funzione è a valori discreti, definita per tutti gli $z \in Z_0^-$ e per ogni valore reale di $a \in R$.

Valgono le stesse considerazioni precedenti per *a = 1*.

Di seguito esempi di potenze di numeri reali ad esponente intero negativo:

Esp.	(-3)^n	(-2)^n	(-0,5)^n	(0,5)^n	2^n	3^n
0	1,0000	1,0000	1,00	1,00	1,0000	1,0000
-1	-0,3333	-0,5000	-2,00	2,00	0,5000	0,3333
-2	0,1111	0,2500	4,00	4,00	0,2500	0,1111
-3	-0,0370	-0,1250	-8,00	8,00	0,1250	0,0370
-4	0,0123	0,0625	16,00	16,00	0,0625	0,0123
-5	-0,0041	-0,0313	-32,00	32,00	0,0313	0,0041
-6	0,0014	0,0156	64,00	64,00	0,0156	0,0014
-7	-0,0005	-0,0078	-128,00	128,00	0,0078	0,0005
-8	0,0002	0,0039	256,00	256,00	0,0039	0,0002
-9	-0,0001	-0,0020	-512,00	512,00	0,0020	0,0001
-10	0,0000	0,0010	1.024,00	1.024,00	0,0010	0,0000
-11	-0,0000	-0,0005	-2.048,00	2.048,00	0,0005	0,0000
-12	0,0000	0,0002	4.096,00	4.096,00	0,0002	0,0000
-13	-0,0000	-0,0001	-8.192,00	8.192,00	0,0001	0,0000
-14	0,0000	0,0001	16.384,00	16.384,00	0,0001	0,0000
-15	-0,0000	-0,0000	-32.768,00	32.768,00	0,0000	0,0000
-16	0,0000	0,0000	65.536,00	65.536,00	0,0000	0,0000
-17	-0,0000	-0,0000	-131.072,00	131.072,00	0,0000	0,0000
-18	0,0000	0,0000	262.144,00	262.144,00	0,0000	0,0000
-19	-0,0000	-0,0000	-524.288,00	524.288,00	0,0000	0,0000
-20	0,0000	0,0000	1.048.576,00	1.048.576,00	0,0000	0,0000

Come si può notare, quando la base è Reale negativa, la potenza, così come definita, assume valori di segno alterno e quindi pare opportuno stabilire che la base **a** delle potenze con esponente intero, e quindi a maggior ragione per quelle con esponente razionale o reale, sia sempre positiva.

Potenze con esponente razionale positivo: $\frac{p}{q} \in Q^+ \rightarrow y = a^{\frac{p}{q}}, a \in R^+, y \in R^+, p \in N, q \in N_0$

Si chiama potenza di base 'a' ($a \in R^+$ *) ed esponente razionale positivo (* $\frac{p}{q} \in Q^+$ *) quel radicale che ha per indice q e per radicando* a^p

In altri termini: $a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}$

Se a = 1, $a^{\frac{p}{q}} = 1 \quad \forall \quad \frac{p}{q} \in Q^+, p \in N, q \in N_0$

Se a = 0, $a^{\frac{p}{q}} = 0 \quad \forall \quad \frac{p}{q} \in Q^+, p \in N, q \in N_0$, 0^0 non ha significato.

La funzione non è più a valori discreti in quanto, dato un valore qualsiasi, non è possibile individuarne il successivo, ma il suo *codominio è denso* poiché tra due valori qualsiasi y_1 e y_2 tra loro distinti ($y_1 < y_2$), esistono infiniti altri valori maggiori di y_1 e minori di y_2.

p e *q* sono numeri naturali; *q* è diverso da 0; se q = 1 $a^{\frac{p}{q}} = a^p$

Visto che il rapporto p/q è un numero razionale, i due numeri naturali sono tra loro commensurabili, esiste cioè un numero m naturale tale che: $p = r_1 m \quad e \quad q = r_2 m \rightarrow \frac{p}{q} = \frac{r_1}{r_2}$

come, ad esempio: $\frac{3}{4} = \frac{75}{100} \quad con \quad m = 75$

$\frac{1}{3} = \frac{3}{9} \quad con \quad m = 3$

Notiamo che dall'equivalenza $a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}$ si deduce che **la radice q-esima di a elevato alla p è quel numero reale r tale che $r^q = a^p$** e quindi per i cosiddeti 'radicali' valgono le consuete proprietà enunciate per le potenze con esponente naturale.

Nel paragrafo dedicato ai radicali, sarà sviluppato un metodo alternativo per il loro calcolo, basato appunto sulle proprietà delle potenze così come già enunciate sopra.

Potenze con esponente razionale negativo: $\frac{p}{q} \in Q^+ \rightarrow y = a^{-(\frac{p}{q})}, a \in R^+, y \in R^+, p \in N_0, q \in N_0$

Si chiama potenza di base 'a' ($a \in R^+$) ed esponente razionale negativo ($-(\frac{p}{q}) \in Q^-$) l'inverso della potenza nella stessa base e con lo stesso esponente, cioè l'inverso del radicale che ha per indice q e per radicando a^p

In altri termini: $a^{-(\frac{p}{q})} = \frac{1}{\sqrt[q]{a^p}}, \quad a \in R^+, \frac{p}{q} \in Q^+, p \in N_0, q \in N_0$

Se a = 1, $a^{-(\frac{p}{q})} = 1 \quad \forall \quad \frac{p}{q} \in Q^+, p \in N_0, q \in N_0$

Se a = 0, $\forall \quad a^{-(\frac{p}{q})} = 0 \quad , \quad \frac{p}{q} \in Q^+, p \in N_0, q \in N_0$ 0^0 non ha significato.

La funzione non è più a valori discreti in quanto, dato un valore qualsiasi, non è possibile individuarne il successivo, ma il suo *codominio è denso* poiché tra due valori qualsiasi y_1 e y_2 tra loro distinti ($y_1 < y_2$), esistono infiniti altri valori maggiori di y_1 e minori di y_2.

p e *q* sono numeri naturali; *q* è diverso da 0; se q = 1 $a^{-(\frac{p}{q})} = a^{-p}$ e quindi valgono le proprietà enunciate per le potenze con esponente naturale.

Potenza con esponente reale (o esponenziale in base a):

$$x \in R \rightarrow y = a^x, \quad a \in R^+, y \in R^+$$

che si può anche scrivere :

$$x \in R \rightarrow y = \exp_a(x), a \in R^+, y \in R^+$$

L'estensione alle potenze con esponente irrazionale (e quindi a quelle con esponente reale) pone un problema in quanto il numero irrazionale (con infinite cifre decimali non periodiche) è individuato da due classi contigue di numeri razionali, caratterizzate dalla proprietà che ogni numero della prima classe è minore di ciascuno dei numeri della seconda classe e che, comunque piccolo si fissi un numero ϵ, esistono sempre due numeri appartenenti alle due classi tali che la loro differenza sia in modulo minore di ϵ. In altre parole, le due classi di numeri approssimano quanto si vuole il numero irrazionale con valori per eccesso e per difetto ed individuano in tal modo, in maniera univoca, il numero irrazionale stesso come elemento separatore delle due classi.
Utilizzando questa proprietà è possibile definire *due classi contigue di potenze con esponenti razionali individuati dai numeri delle due classi che hanno come elemento separatore l'esponente reale*.
Così la potenza $3^{\sqrt{2}}$ sarà individuata dalle due classi contigue:

$3^1 \quad 3^{1,4} \quad 3^{1,41} \quad 3^{1,414} \quad 3^{1,4142} \quad .....$
$3^2 \quad 3^{1,5} \quad 3^{1,42} \quad 3^{1,415} \quad 3^{1,4143} \quad .....$

che godono delle due proprietà sopra ricordate e che quindi individuano come loro elemento di

separazione *unico* la potenza $3^{\sqrt{2}}$

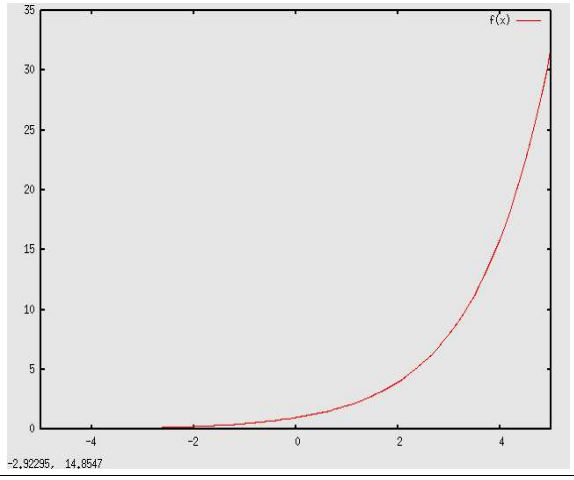
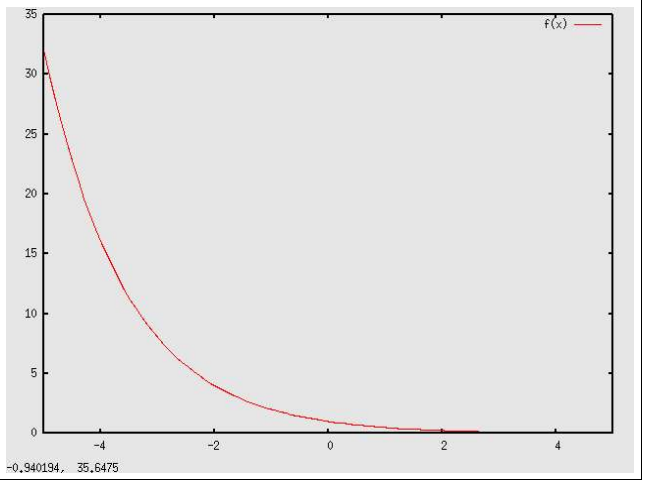
Si chiama potenza di base 'a' ($a \in R^+$) ed esponente reale x ($y = a^x$, $a \in R^+$, $y \in R^+$) quel numero reale coincidente con l'elemento separatore delle due classi contigue di numeri reali che si ottengono elevando la base ai valori approssimati rispettivamente per eccesso e per difetto che individuano l'esponente reale x.

Quando $x \in N$, $y = a^x$ è una potenza reale ad esponente naturale;
Quando $x \in Q$, $y = a^x$ è una potenza reale ad esponente razionale;
Quando a = 0, $y = a^x$ è la funzione costante y=0.
Quando a = 1, $y = a^x$ è la funzione costante y=1.

E' una funzione continua (cioè non discreta come accadeva per esponenti naturali o interi, poiché $x \in R^+$) definita per tutti i valori reali di x e per ogni valore reale positivo della base ($a \in R^+$).

Per la funzione $y = a^x$ valgono le consuete proprietà già ricordate all'inizio per le potenze ad esponente naturale.

Possiamo rappresentare la funzione esponenziale $y = a^x$ nei due casi distinti che a, sempre positivo, sia maggiore di 1 oppure compreso tra 0 ed 1:

Grafico di $y = a^x$ con **a > 1**	Grafico di $y = a^x$ con **0 < a < 1**
	

Per a = 1, la funzione $y = a^x$ assume ovviamente sempre il valore 1.

Le proprietà della funzione esponenziale e della sua inversa (funzione logaritmo) sono descritte nella sezione ad esse dedicata (Funzioni esponenziali e logaritmiche).

Il calcolo dei radicali

E' questo ancora un argomento del programma di matematica che comporta un dispendio di tempo notevole, pur non considerando l'uso di calcolatrici scientifiche e di computer che lo rendono oggi del tutto inutile.

Basandosi però sulle proprietà delle potenze già ricordate, tutte le astruse complicazioni del calcolo si possono superare facilmente, senza utilizzare regole aggiuntive a quelle già note.

Semplificazione di un radicale:

La semplificazione di un radicale si ottiene dividendo sia l'indice che l'esponente del radicando per un eventuale fattore comune (se non esiste il fatore comune, il radicale viene detto irriducibile):

$$\sqrt[nk]{a^{(pk)}} = \sqrt[n]{a^{p}}$$

$$ma, con \quad potenze \quad ad \quad esponente \; frazionario:$$

$$a^{(\frac{nk}{pk})} = a^{(\frac{p}{k})}$$

come immediata conseguenza delle proprietà delle frazioni, applicate all'esponente.

Moltiplicazione di due radicali con lo stesso indice:

Il prodotto di due radicali con lo stesso indice è un radicale (con lo stesso indice) che ha per radicando il prodotto dei due radicandi:

$$\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$$

$$ma, con \quad potenze \quad ad \quad esponente \; frazionario:$$

$$a^{(\frac{1}{n})} \quad b^{(\frac{1}{n})} = (ab)^{(\frac{1}{n})}$$

come immediata conseguenza delle proprietà delle potenze con lo stesso esponente.

La cosa si complica quando gli indici non sono uguali perchè bisogna trasformare i due radicali dati in equivalenti con lo stesso indice; in questi casi la regola è molto più complessa e non la enunceremo, ricordando invece che, con le potenze ad esponente frazionario, si tratta semplicemente di eseguire la somma delle due frazioni 1/p e 1/n che esprimono i due esponenti:

- se hanno lo stesso radicando:

$$\sqrt[n]{a}\sqrt[p]{a} = \sqrt[np]{a^{p} \quad a^{n}} \quad con \; n \; ed \; p \; primi \; tra \; loro$$

$$ma, con \quad potenze \quad ad \quad esponente \; frazionario:$$

$$a^{(\frac{1}{n})} \quad a^{(\frac{1}{p})} = a^{(\frac{(p+n)}{np})}$$

- se hanno radicandi diversi:

$$\sqrt[n]{a}\sqrt[p]{b} = \sqrt[np]{a^{p} \quad b^{n}} \quad con \; n \; ed \; p \; primi \; tra \; loro$$

$$ma, con \quad potenze \quad ad \quad esponente \; frazionario:$$

$$a^{(\frac{1}{n})} \quad b^{(\frac{1}{p})} = a^{(\frac{p}{np})} \; b^{(\frac{n}{np})} = (a^{p} b^{n})^{(\frac{1}{np})}$$

Divisione di due radicali con lo stesso indice:

Il rapporto di due radicali con lo stesso indice è un radicale (con lo stesso indice) che ha per radicando il rapporto dei due radicandi:

$$\frac{(\sqrt[n]{a})}{(\sqrt[n]{b})}=\sqrt[n]{\frac{a}{b}}$$

ma, con potenze ad esponente frazionario:

$$\frac{a^{(\frac{1}{n})}}{b^{(\frac{1}{n})}}=(\frac{a}{b})^{(\frac{1}{n})}$$

Come sopra la cosa si complica se gli indici non sono uguali perchè bisogna trasformare i due radicali dati in equivalenti con lo stesso indice:

- se hanno lo stesso radicando:

$$\frac{(\sqrt[n]{a})}{(\sqrt[p]{a})}=\sqrt[np]{\frac{a^p}{a^n}}=\sqrt[np]{a^{(p-n)}} \quad \textit{con n e p primi tra loro}$$

ma, con potenze ad esponente frazionario:

$$\frac{a^{(\frac{1}{n})}}{a^{(\frac{1}{p})}}=a^{(\frac{(p-n)}{np})}$$

- se non nanno lo stesso radicando:

$$\frac{(\sqrt[n]{a})}{(\sqrt[p]{b})}=\frac{\sqrt[np]{a^p}}{\sqrt[np]{b^n}}=\sqrt[np]{\frac{a^p}{b^n}} \quad \textit{con n e p primi tra loro}$$

ma, con potenze ad esponente frazionario:

$$\frac{a^{(\frac{1}{n})}}{b^{(\frac{1}{p})}}=\frac{a^{(\frac{p}{np})}}{b^{(\frac{n}{np})}}$$

Trasporto di un fattore esterno sotto il simbolo di radice:

In questo caso si deve ricordare che è possibile trasportare sotto radice **solo un fattore positivo** (o non negativo) e quindi, quando non ne sia accertato il segno, si dovrà indicare chiaramente tale condizione.

Un fattore non negativo si può trasportare sotto il simbolo di radice, elevandolo alla potenza con

esponente uguale all'indice della radice:

$$a\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{a^n b} \quad con \quad a\geq 0$$

e con potenze ad esponente frazionario:

$$ab^{(\frac{1}{n})}=a^{(\frac{n}{n})}\,b^{(\frac{1}{n})}=(a^n\,b)^{(\frac{1}{n})} \quad con \quad a\geq 0$$

Trasporto di un fattore interno fuori dal simbolo di radice:

Anche in questo caso si deve ricordare che è possibile trasportare fuori dalla radice **solo un fattore positivo** (o non negativo) e quindi, quando non ne sia accertato il segno, si dovrà indicare chiaramente tale condizione.

Un fattore non negativo si può trasportare fuori dal simbolo di radice, dividendo il suo esponente (che si suppone maggiore dell'indice della radice) per l'indice della radice; l'eventuale resto della divisione è l'esponente dello stesso fattore che rimane sotto il segno:

$$\sqrt[n]{a^{(n+k)}b}=a\sqrt[n]{a^k b} \quad con \quad a\geq 0$$

e con potenze ad esponente frazionario:

$$a^{(\frac{(n+k)}{n})}\,b^{(\frac{1}{n})}=a\,a^{(\frac{k}{n})}\,b^{(\frac{1}{n})} \quad con \quad a\geq 0$$

ove abbiamo semplicemente ridotto ai minimi termini la frazione (n+k)/n.

Come già chiarito, *conviene porre molta attenzione al segno del fattore che si intende portare fuori o inserire sotto il simbolo di radice*.

Facciamo un esempio:

$$\sqrt{3(x-1)^2}=(x-1)\sqrt{3}$$

$$operazione\ corretta\ solo\ se\ (x-1)\geq o$$

$$altrimenti\ (se\ x-1<0):$$

$$\sqrt{3(x-1)^2}=(1-x)\sqrt{3}$$

Se si suppone che il radicale abbia iniazialmente un valore positivo (come è lecito pensare), nel primo caso (visto che anche x-1 è positivo) il segno dell'espressione rimane inalterato, mentre nel secondo, senza cambiare segno al binomio x-1, l'espressione assumerebbe un valore negativo!

Molto spesso questa considerazione viene trascurata con conseguenze gravi, soprattutto nella discussione delle disequazioni.....

Potenza di un radicale o radice di una radice

Nel caso dell'uso della convenzione tradizionale (cioè con i radicali) bisogna distinguere i due casi:

Per eseguire la potenza di un radicale è necessario moltiplicare sia l'esponente del radicando per il numero (che rappresenta l'esponente della potenza a cui il radicale deve essere elevato).

Per eseguire la radice di una radice è necessario moltiplicare l'indice della radice per il numero (che rappresenta l'indice della radice che deve essere applicato al radicale).

Quando invece si usa la notazione degli esponenti frazionari è invece sufficiente moltiplicare tutti gli esponenti per il numero intero (nel caso di potenza di un radicale) o frazionario (nel caso di radice di radice):

Per potenza di un radicale :

$$(\sqrt[n]{a})^k = \sqrt[n]{a^k}$$

con esponenti frazionari :

$$(a^{(\frac{1}{n})})^k = a^{(\frac{k}{n})}$$

Per radice di una radice :

$$\sqrt[k]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[nk]{a}$$

con esponenti frazionari :

$$(a^{(\frac{1}{n})})^{(\frac{1}{k})} = a^{(\frac{1}{kn})}$$

La notazione ad esponenti frazionari riesce dunque a semplificare notevolmente il calcolo dei radicali, ma esso ha l'indubbio vantaggio di evidenziare lo sviluppo dell'insieme dei numeri reali che, a partire dalle potenze ad esponente naturale, e attraverso le potenze ad esponente razionale (radicali), ci permette di definire la funzione esponenziale.

Questa stessa notazione, considerando i radicali come potenze, sia pure ad esponente frazionario, ci permette di evitare errori comuni che certamente non faremmo con potenze ad esponente naturale; nessuno si sognerebbe di operare in questo modo:
$(x+1)^2 = x^2+1$ perchè si tratta evidentemente del quadrato di un binomio, mentre è comune l'errore
$\sqrt{x^2+1} = x$ *visto che* $\sqrt{1} = 1$
Il radicando di un radicale va quindi sempre considerato come la base di una potenza.

<u>Razionalizzazione di un denominatore</u>
La trasformazione di una frazione con denominatore irrazionale in una equivalente con denominatore razionale è dettata da ragioni pratiche (legate alla difficoltà dello sviluppo del calcolo con espressioni irrazionali), ma soprattutto a problemi di approssimazione numerica che si incontrerebbero con i radicali al denominatore: mentre è sicuramente difficile conoscere il valore approssimato di $1/\sqrt{2}$, visto che non sappaiamo con quale approssimazione eseguire la divisione, lo stesso numero razionalizzato $\sqrt{2}/2$ può essere approssimato facilmente.
Senza trattare dettagliatamente tutti i casi di razionalizzazione, forniamo di seguito un metodo generale che può applicare ai più comuni esercizi presentati nelle scuole.

Caso di un solo radicale al denominatore:
per le proprietà delle frazioni, *al fine di rendere intero l'esponente* dell'espressione a denominatore, è sufficiente moltiplicare numeratore e denominatore per una stessa potenza:

$$\frac{a}{b^{(\frac{1}{n})}}=\frac{(a\,b^n)}{(b^{(\frac{1}{n})}\,b^n)}=\frac{(a\,b^n)}{b}$$

Caso di due radicali con lo stesso indice a denominatore:

Si debba razionalizzare la seguente espressione:

$$\frac{a}{(\sqrt[n]{b}\pm\sqrt[n]{c})}$$

Si ponga $x=\sqrt[n]{b}$ *e* $y=\sqrt[n]{c}$

Il problema si riduce a trovare un polinomio $P_{n-1}(x,y)$, *di grado* $n-1$ *omogeneo, ordinato e completo rispetto ad x e y, per cui si abbia:*

$$(x\pm y)P_{n-1}(x,y)=x^n\pm y^n$$

Questo polinomio fornirà il fattore per cui moltiplicare sia il numeratore che il denominatore.

Per la ricerca del polinomio, utilizzare la tabellina dei prodotti notevoli riportata nel paragrafo 3.b del capitolo dedicato alle "Regole generali per la scomposizione dei polinomi".