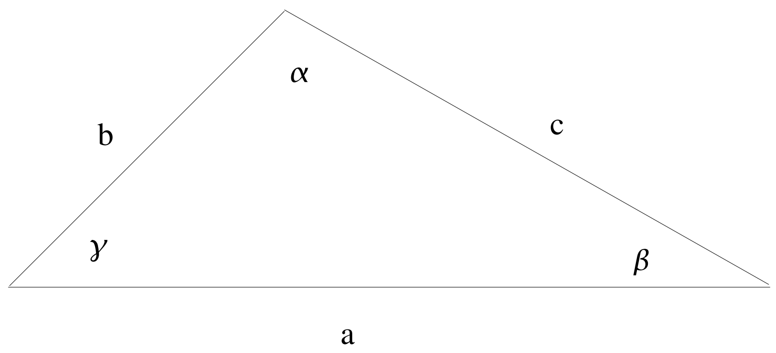
Trigonometria

Risoluzione dei triangoli rettangoli

Per 'risoluzione' di un triangolo si intende la determinazione di tutti i suoi elementi (angoli e lati) a partire dalla conoscenza di almeno tre elementi, uno dei quali sia un lato.
Prima di tentare la risoluzione di un triangolo è necessario verificare la conoscenza di questi tre elementi.
Nel caso dei triangoli rettangoli, essendo noto un angolo, sono sufficienti altri due elementi, uno dei quali sia un lato.

Consideriamo il triangolo rettangolo, retto in α, della figura:



per quanto enunciato, il triangolo sarà risolubile nei seguenti casi:

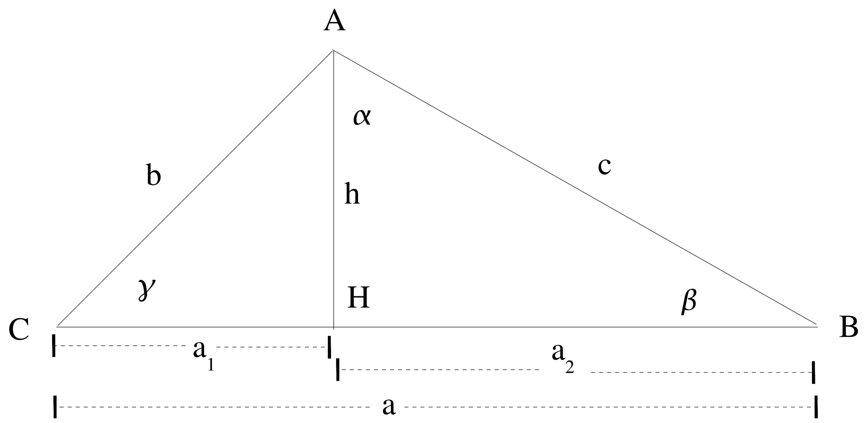
Dati conosciuti	***Formule risolutive***
γ **, b**	$\cos(\gamma) = b/a \Rightarrow$ $\mathbf{a = b/\cos(\gamma)}$ $\sin(\gamma) = c/a \Rightarrow$ $\mathbf{c = a \sin(\gamma)}$ $\beta = \pi - \alpha - \gamma$
β , b	$\sin(\beta) = b/a \Rightarrow$ $\mathbf{a = b/\sin(\beta)}$ $\cos(\beta) = c/a \Rightarrow$ $\mathbf{c = a \cos(\beta)}$ $\gamma = \pi - \alpha - \beta$
b , c	$\tan(\beta) = b/c \Rightarrow \beta$ $\sin(\beta) = b/a \Rightarrow$ $\mathbf{a = b/\sin(\beta)}$ $\gamma = \pi - \alpha - \beta$
b , a	$\sin(\beta) = b/a \Rightarrow \beta$ $\cos(\beta) = c/a \Rightarrow$ $\mathbf{c = a \cos(\beta)}$ $\gamma = \pi - \alpha - \beta$
γ , c	$\sin(\gamma) = c/a \Rightarrow$ $\mathbf{a = c/\sin(\gamma)}$ $\cos(\gamma) = b/a \Rightarrow$ $\mathbf{b = a \cos(\gamma)}$ $\beta = \pi - \alpha - \gamma$

Dati conosciuti	*Formule risolutive*
β , c	$\cos(\beta) = c/a \Rightarrow$ $\mathbf{a = c/\cos(\beta)}$ $\sin(\beta) = b/a \Rightarrow$ $\mathbf{b = a \sin(\beta)}$ $\gamma = \pi - \alpha - \beta$
c , a	$\sin(\gamma) = c/a \Rightarrow \gamma$ $\cos(\gamma) = b/a \Rightarrow$ $\mathbf{b = a \cos(\gamma)}$ $\beta = \pi - \alpha - \gamma$
β , a	$\sin(\beta) = b/a \Rightarrow$ $\mathbf{b = a \sin(\beta)}$ $\cos(\beta) = c/a \Rightarrow$ $\mathbf{c = a \cos(\beta)}$ $\gamma = \pi - \alpha - \beta$
γ , a	$\sin(\gamma) = c/a \Rightarrow$ $\mathbf{c = a \sin(\gamma)}$ $\cos(\gamma) = b/a \Rightarrow$ $\mathbf{b = a \cos(\gamma)}$ $\beta = \pi - \alpha - \gamma$

Teoremi di Euclide e Pitagora

Dalle proprietà dei triangoli simili, si possono facilmente ricavare i teoremi di Euclide e Pitagora, utili per la risoluzione di molti problemi geometrici.

Consideriamo i tre triangoli rettangoli BAC, AHC, AHB della figura:



Si ha che:

$\mathbf{a_1 = b \cos(\gamma)}$ $\quad$ $\mathbf{a = b/\cos(\gamma)}$ $\quad$ e quindi: $\mathbf{a\, a_1 = b^2}$

$\mathbf{a_2 = c \cos(\beta)}$ $\quad$ $\mathbf{a = c/\cos(\beta)}$ $\quad$ **e quindi:** $\mathbf{a\, a_2 = c^2}$

$$\tan(\gamma)=\frac{h}{a_1} \quad \tan(\beta)=\frac{h}{a_2} \quad \rightarrow \quad \tan(\gamma)\tan(\beta)=\frac{h^2}{(a_1 a_2)} \quad \rightarrow \quad h^2=a_1 a_2$$

che esprimono i due teoremi di Euclide:

Il quadrato costruito su un cateto è equivalente al rettangolo che ha per dimensioni la proiezione del cateto sull'ipotenusa e l'intera ipotenusa.

Il quadrato costruito sull'altezza relativa all'ipotenusa è equivalente al rettangolo che ha per dimensioni le due proiezioni dei cateti sull'ipotenusa.

Ancora dagli stessi triangoli rettangoli, si ricava che:

$b = a\cos(\gamma)$, $c = a\sin(\gamma)$, e quindi: $b^2 = a^2\cos^2(\gamma)$, $c^2 = a^2\sin^2(\gamma)$ da cui

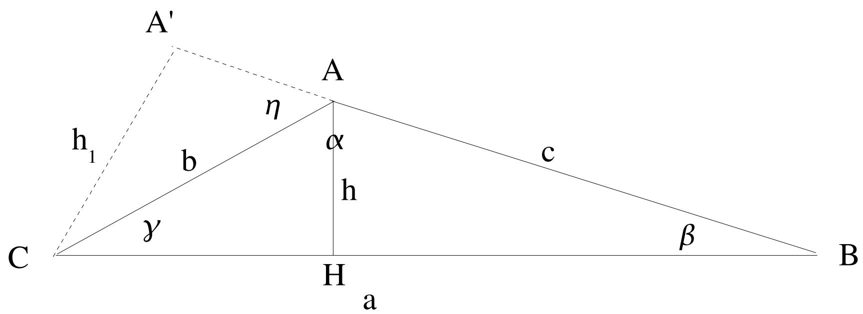
$$b^2 + c^2 = a^2(\cos^2(\gamma)+\sin^2(\gamma)) = a^2$$

che esprime il teorema di Pitagora:

Il quadrato costruito sull'ipotenusa è equivalente alla somma dei quadrati costruiti sui cateti.

Teorema dei seni

Consideriamo il triangolo ottusangolo ABC, e tracciamo l'altezza relativa alla base BC:



Nei triangoli AHB e AHC, si ha:

$h = c\sin(\beta)$ e **$h = b\sin(\gamma)$** dunque: **$c\sin(\beta) = b\sin(\gamma)$**

da cui, dividendo ambo i membri per $\sin(\beta)\sin(\gamma)$, si ricava una prima relazione:

$$\frac{c}{(\sin(\gamma))} = \frac{b}{(\sin(\beta))}$$

Nei triangoli BA'C e BA'A, si ha:

$h_1 = a\sin(\gamma)$ e **$h_1 = c\sin(\eta) = c\sin(\pi - \alpha) = c\sin(\alpha)$** dunque: **$a\sin(\gamma) = c\sin(\alpha)$**

da cui, dividendo ambo i membri per $\sin(\alpha)\sin(\gamma)$, si ricava una seconda relazione:

$$\frac{c}{(\sin(\gamma))} = \frac{a}{(\sin(\alpha))}$$

Quindi si può enunciare il teorema dei seni:

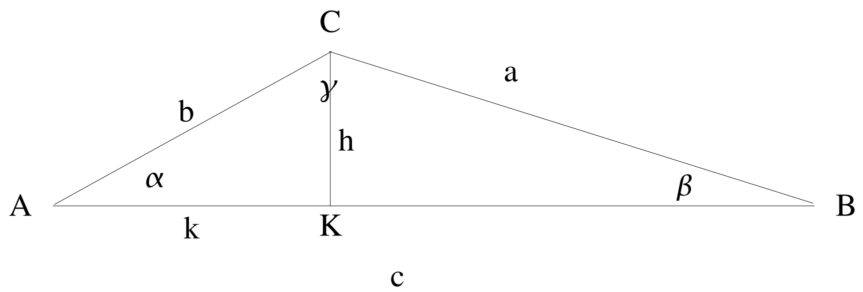
In ogni triangolo è costante il rapporto tra ciascun lato ed il seno dell'angolo ad esso opposto:

$$\frac{\mathbf{a}}{(\mathbf{sin}(\alpha))} = \frac{\mathbf{b}}{(\mathbf{sin}(\beta))} = \frac{\mathbf{c}}{(\mathbf{sin}(\gamma))}$$

Teorema del coseno (Carnot)

Per dimostrare il teorema del coseno, valido per triangoli qualunque, è necessario considerare due casi distinti a seconda che l'angolo compreso tra i due lati sia minore o maggiore di $\pi/2$:

Caso dell'angolo $\alpha < \pi/2$

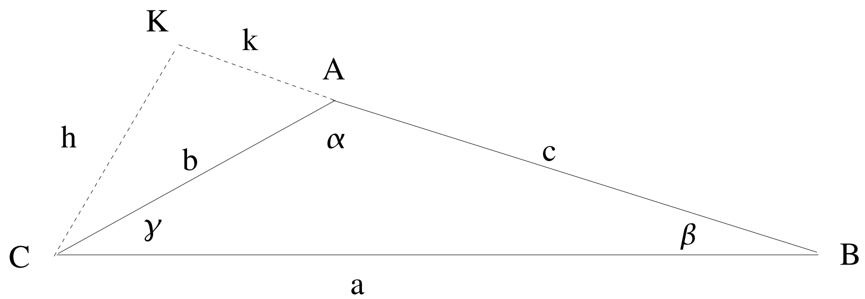


Considerando il triangolo CKA, si ha che: $h = b \sin(\alpha)$ e $k = b \cos(\alpha)$

Applicando ora il teorema di Piatgora al triangolo CKB, sono verificate le seguenti uguaglianze:

$$a^2 = h^2 + (c-k)^2 = h^2 + c^2 + k^2 -2ck = b^2 \sin^2(\alpha) + b^2 \cos^2(\alpha) + c^2 - 2bc \cos(\alpha) =$$
$$= b^2 + c^2 - 2bc \cos(\alpha)$$

Caso dell'angolo $\alpha > \pi/2$



Considerando il triangolo CKA, si ha che: $h = b \sin(\pi - \alpha) = b \sin(\alpha)$ e

$k = b \cos(\pi - \alpha) = b \cos(\alpha)$

Applicando ora il teorema di Piatgora al triangolo CKB, sono verificate le seguenti uguaglianze:

$$a^2 = h^2 + (c+k)^2 = h^2 + c^2 + k^2 +2ck = b^2 \sin^2(\alpha) + b^2 \cos^2(\alpha) + c^2 - 2bc \cos(\alpha) =$$
$$= b^2 + c^2 - 2bc \cos(\alpha)$$

E quindi possiamo enunciare il teorema del coseno (o di Carnot):

In un triangolo qualunque il quadrato costruito su un lato è equivalente alla somma dei quadrati costruiti sugli altri due diminuita del doppio prodotto di questi per il coseno dell'angolo tra essi compreso:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos(\alpha)$$

Risoluzione di triangoli qualunque

Per la risoluzione di un triangolo qualunque occorrono almeno tre elementi di cui uno sia un lato. Con riferimento all'ultima figura:

Dati conosciuti	***Formule risolutive***
α , β , b	$\gamma = \pi - \alpha - \beta$ dal teor. seni: $\frac{a}{(\sin(\alpha))}=\frac{b}{(\sin(\beta))}=\frac{c}{(\sin(\gamma))}$ $a=b(\frac{(\sin(\alpha))}{(\sin(\beta))})$ $c=a(\frac{(\sin(\gamma))}{(\sin(\alpha))})$
γ, b, a	dal teor. del coseno: $c^2 = b^2 + a^2 - 2ab\cos(\gamma)$ $c=\sqrt{(b^2+a^2-2ab\cos(\gamma))}$ dal teor. seni: $\frac{a}{(\sin(\alpha))}=\frac{b}{(\sin(\beta))}=\frac{c}{(\sin(\gamma))}$ $\sin(\alpha)=\frac{a}{c}\sin(\gamma)$ $\beta = \pi - \alpha - \gamma$
γ, b, c	dal teor. seni: $\frac{a}{(\sin(\alpha))}=\frac{b}{(\sin(\beta))}=\frac{c}{(\sin(\gamma))}$ $\sin(\beta)=\frac{b}{c}\sin(\gamma)$ $\alpha = \pi - \gamma - \beta$ $a=c(\frac{(\sin(\alpha))}{(\sin(\gamma))})$
a , b , c	dal teor. del coseno: $c^2 = b^2 + a^2 - 2ab\cos(\gamma)$ $\cos(\gamma)=\frac{(b^2+a^2-c^2)}{(2ab)}$ $\cos(\beta)=\frac{(c^2+a^2-b^2)}{(2ac)}$ $\alpha = \pi - \gamma - \beta$